Лекція №16

Розділ 11. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ СТЕРЖНІВ ПРИ ПЛОСКОМУ ЗГИНІ

Як відомо, згин буває чистим і поперечним. Коли згинальний момент – єдиний силовий фактор в перерізі стержня, то згин називають *чистим*. Коли ж разом зі згинальним моментом в перерізі діють ще й поперечні сили, то згин називають *поперечним*.

Тема 11.1. Напруження в прямому стержні при чистому згинанні

На рис. 11.1 наведені приклади практичної реалізації умов чистого згину.

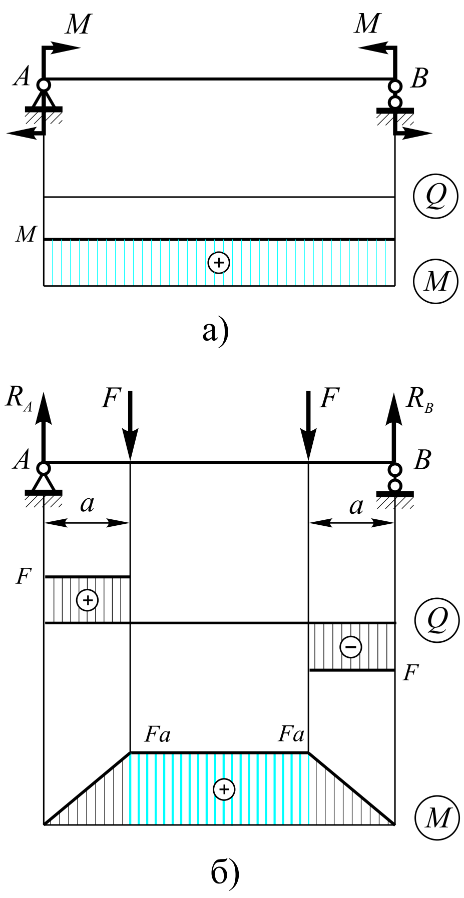

Рис. 11.1. Схеми реалізації умов чистого згину: а – за допомогою двох моментів; б – за допомогою двох сил

На рис. 11.1 а зображена двоопорна балка, на яку діють однакові за величиною протилежно спрямовані моменти. Тобто задана система сил знаходиться в рівновазі, а значить опорні реакції не виникають. Як наслідок поперечні сили в перерізах відсутні, а діють лише згинальні моменти.

Чистий згин частини стержня можна отримати, приклавши до нього дві однакові зосереджені сили на однаковій відстані від опор (див. рис. 11.1 б). Це схема так званого *чотириточкового згину*. Легко переконатися, що реакції в опорах дорівнюватимуть за величиною діючим силам: $R_A = R_B = F$. За таких умов на центральній ділянці балки між точками прикладання сил діятиме лише згинальний момент.

Щоб визначити напруження в деякому перерізі стержня при чистому згинанні, розв'яжемо відповідне інтегральне рівняння рівноваги згідно з прийнятим алгоритмом.

1. *Статичний бік задачі.*

З шести інтегральних рівнянь рівноваги (5.2) – (5.7) залишиться тільки рівняння для згинального моменту. Вважаючи, що згин відбувається відносно осі z (тобто вісь z перпендикулярна до площини рисунка), рівняння запишемо так:

$$M_z = \int_A \sigma y dA \qquad (11.1)$$

2. *Геометричний бік задачі.*

Щоб дослідити характер деформування стержня при згинанні, можна провести простий експеримент, де в якості стержня використати еластичну модель, наприклад – гумову, що дозволяє отримати досить значні деформації.

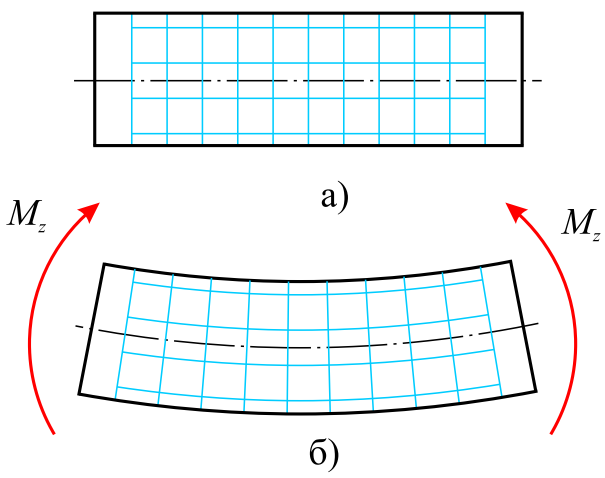

Рис. 11.2. Деформація стержня в умовах чистого згинання:
а – стержень до деформації;
б – стержень після деформації

На бічну поверхню стержня попередньо наносять прямокутну сітку поздовжніх і поперечних ліній (рис. 11.2 а). Після згинання стержня спостерігається таке:

а) поздовжні лінії стають дугами кола;

б) поперечні лінії як контури перерізів залишаються плоскими;

в) лінії контурів повертаються, залишаючись нормальними до поздовжніх волокон;

г) торці стержня, плоскі до деформації, залишаються плоскими і після деформації.

Все вище означене підтверджує виконання *гіпотези плоских перерізів* і для випадку чистого згинання стержня.

З наведеної картини деформування стержня при згинанні видно, що не всі волокна деформуються однаково. Для нашого випадку (рис. 11.2) верхні волокна скорочуються, а нижні – подовжуються (до речі, будуючи епюри згинальних моментів, ми також розрізняли стиснені і розтягнені волокна). Отже, мають бути волокна, що при згинанні стержня не змінюють довжини.

Сукупність волокон, що не змінюють своєї довжини при згинанні стержня, називається <u>нейтральним шаром</u>.

Нейтральний шар стержня перетинається з його поперечним перерізом по прямій, яка називається <u>нейтральною лінією перерізу стержня</u>.

В умовах плоского згинання нейтральний шар завжди буде перпендикулярним до силової площини, а отже і нейтральна лінія завжди буде перпендикулярною до силової лінії в перерізі (це буде показано далі).

Виділимо елемент стержня довжиною dx (рис. 11.3). Вважатимемо, що вісь x належить нейтральному шару.

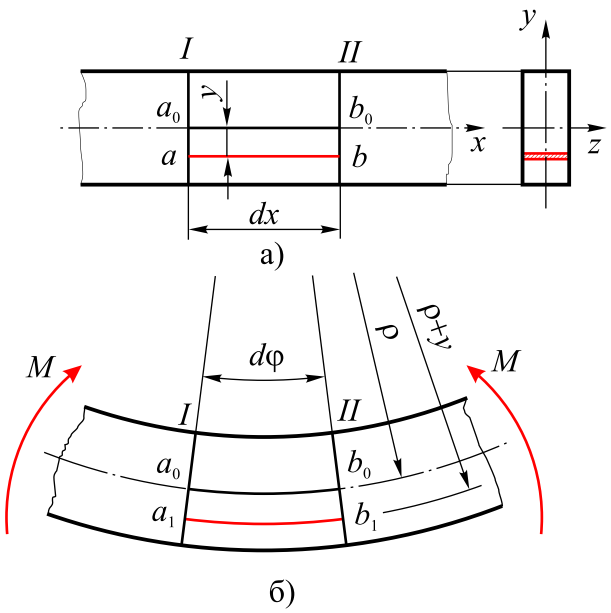

Рис. 11.3. Елемент стержня: а – до деформації; б – після деформації

Після згинання попередньо паралельні перерізи *I* і *II* повернуться на кут $d\varphi$, залишаючись плоским.

Відрізок волокна a_0b_0, що належить нейтральному шару, довжини своєї не змінює:

$$a_0b_0 = \cup a_0b_0 \text{ або } dx = \rho d\varphi .$$

Відносну деформацію відрізка волокна ab, що знаходиться на відстані y від нейтрального шару, знайдемо як

$$\varepsilon = \frac{\cup a_1b_1 - a_1b_1}{a_1b_1} = \frac{(\rho + y)d\varphi - dx}{dx} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}.$$

Отже,

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \tag{11.2}$$

3. *Фізичний бік задачі.*

Оскільки, згідно з інтегральним рівнянням рівноваги (11.1), в довільній точці перерізу стержня при чистому згинанні діє тільки нормальне напруження, а бічним тиском між волокнами нехтують, то можна зробити висновок, що волокна перебувають в умовах лінійного напруженого стану. Закон Гука для лінійного напруженого стану:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}. \tag{11.3}$$

4. *Синтез.*

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E}{\rho} y . \tag{11.4}$$

$$M_z = \int_A \frac{E}{\rho} y^2 dA = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA .$$

Тут $\int_A y^2 dA = I_z$ – момент інерції перерізу відносно осі *z*. Тоді кривина нейтрального шару стержня

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} . \tag{11.5}$$

Розглядаючи кривину нейтрального шару як міру деформації стержня при згинанні, вираз (11.5) можемо трактувати як закон Гука в абсолютних величинах для чистого згинання. Добуток EI_z називають *жорсткістю перерізу стержня при згині*.

Підставляючи (11.5) в (11.4), отримаємо

$$\boxed{\sigma = \frac{M_z}{I_z} y} . \tag{11.6}$$

Ця формула, що вперше була виведена французьким ученим К. Нав'є, дозволяє визначати нормальні напруження в будь-якій точці перерізу при згинанні. Як бачимо, закон їх розподілу по висоті перерізу лінійний. Залишається визначити розташування осі *z*, тобто положення нейтральної лінії в перерізі. Для цього розглянемо ті з інтегральних рівнянь рівноваги (5.2) – (5.7), які містять σ, і які в цьому розв'язанні не використовувались. А саме:

$$N = \int_A \sigma dF \quad \text{і} \quad M_y = \int_A \sigma z dF .$$

Оскільки при чистому згинанні відносно осі *z* $N = 0$ і $M_y = 0$, то, з урахуванням (11.6), маємо такі умови:

$$\frac{M_z}{I_z} \int_A y dF = \frac{M_z}{I_z} S_z = 0 ; \qquad \frac{M_z}{I_z} \int_A yz dF = \frac{M_z}{I_z} I_{yz} = 0 ,$$

де S_z – статичний момент площі перерізу відносно осі *z*, а I_{yz} – відцентровий момент інерції перерізу.

Оскільки $\frac{M_z}{I_z} \neq 0$, то

$$S_z = 0 ; \tag{11.7}$$

$$I_{yz} = 0 . \tag{11.8}$$

Статичний момент площі дорівнює нулю відносно осі, що проходить через центр ваги перерізу, а відцентровий момент дорівнює нулю відносно головних осей. Таким чином, осі y і z (рис. 11.3) є головними центральними осями інерції перерізу стержня.

Остаточно робимо висновок, що при плоскому згинанні силова і нейтральна лінії в перерізі взаємно перпендикулярні і збігаються з відповідними головними центральними осями інерції. Для нашого випадку нейтральна лінія збігається з віссю z, а силова – з віссю y.

Користуючись формулою Нав'є, побудуємо епюру розподілу нормальних напружень в перерізі довільної форми (рис. 11.4), вважаючи вказані на рисунку осі його головними центральними осями інерції.

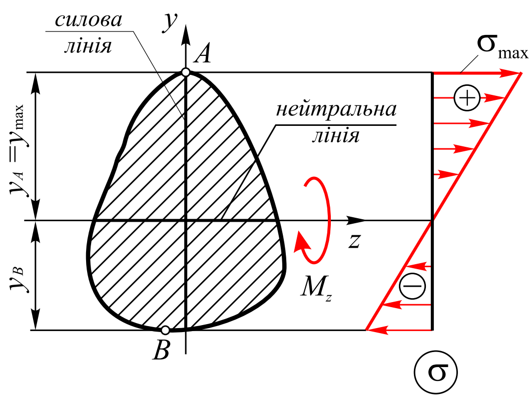

Рис. 11.4. Епюра розподілу нормальних напружень по висоті перерізу стержня

Як можна судити з епюри напружень, найбільше нормальне напруження діє в точці A, тобто в точці, найвіддаленішій від нейтральної лінії (осі z). Знак цього напруження узгоджений з напрямком згинального моменту M_z на рисунку. За такого напрямку верхні волокна стержня розтягаються, а нижні – стискаються. Тоді найбільше нормальне напруження, згідно з формулою (11.6),

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} y_{\max} .$$

Позначимо

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} , \qquad (11.9)$$

де W_z –момент опору перерізу відносно осі z.

Осьовим моментом опору називають відношення осьового моменту інерції перерізу до відстані до найвіддаленішої точки перерізу від цієї осі.

Тоді найбільше за абсолютною величиною напруження в перерізі знаходять за формулою:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} . \qquad (11.10)$$

Для нашого прикладу це напруження розтягу. Щоб визначити найбільше напруження стиску, яке діє в точці B, слід скористатися формулою (11.6), оскільки ця точка не найвіддаленіша від нейтральної лінії:

$$\left|\sigma_B\right| = \frac{M_z}{I_z} y_B .$$

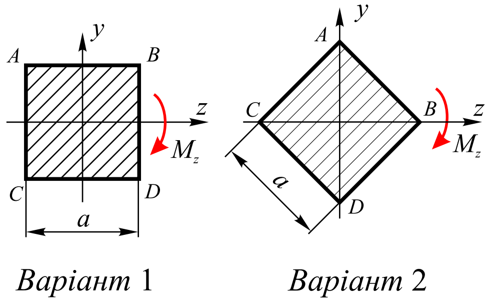

Рис. 11.5. *До прикладу* 11.1

Приклад 11.1 *Порівняти запаси міцності балки у двох варіантах розташування її поперечного перерізу відносно силової лінії (рис. 11.5), якщо згинальний момент у балці $M_z = 2$ кН · м. Матеріал балки – сталь 20. Переріз балки – квадрат зі стороною $a = 50$ мм.*

В обох варіантах розташування перерізу осі y і z є головними центральними осями інерції як осі симетрії. При цьому осі y збігаються з силовими лініями, а осі z – з нейтральними лініями перерізів.

Максимальні напруження діють у найвіддаленіших від осі z точках перерізів, які для першого варіанту розташування належать сторонам AB і CD, а для другого – це точки A і D. Моменти інерції відносно осі z для обох варіантів однакові, адже це головні моменти одного й того ж перерізу: $I_z^{(1)} = I_z^{(2)} = a^4 / 12$. *Моменти ж опору відрізнятимуться, оскільки відстані до найвіддаленіших від осі z точок різні:*

$$y_{\max}^{(1)} = \frac{a}{2}; \qquad y_{\max}^{(2)} = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

а значить

$$W_z^{(1)} = \frac{I_z^{(1)}}{y_{\max}^{(1)}} = \frac{a^4}{12} \cdot \frac{2}{a} \approx 0{,}17 a^3; \qquad W_z^{(2)} = \frac{I_z^{(2)}}{y_{\max}^{(2)}} = \frac{a^4}{12} \cdot \frac{\sqrt{2}}{a} \approx 0{,}12 a^3 .$$

*Згідно з формулою (*11.10*) найбільші напруження в перерізах*

$$\sigma_{\max}^{(1)} = \frac{M_z}{W_z^{(1)}} = \frac{2 \cdot 10^6}{0{,}17 \cdot 50^3} = 94{,}12 \text{ МПа}; \qquad \sigma_{\max}^{(2)} = \frac{M_z}{W_z^{(2)}} = \frac{2 \cdot 10^6}{0{,}12 \cdot 50^3} = 133{,}33 \text{ МПа}.$$

Для сталі 20 *границя текучості* $\sigma_T = 250$ *МПа* [1, *додаток* 4]. *Тоді запаси міцності балки:*

– *для варіанту* 1 $n^{(1)} = \dfrac{\sigma_T}{\sigma_{\max}^{(1)}} = \dfrac{250}{94{,}12} = 2{,}66$;

– *для варіанту* 2 $n^{(2)} = \dfrac{\sigma_T}{\sigma_{\max}^{(2)}} = \dfrac{250}{133{,}33} = 1{,}87$.

Звідси $n^{(1)} / n^{(2)} = 2{,}66/1{,}87 = 1{,}42$.

Отже, запас міцності балки за першим варіантом розташування перерізу відносно силової лінії перевищує запас міцності за другим варіантом розташування майже у 1,5 *рази.*

Тема 11.2. Дотичні напруження в стержні при плоскому поперечному згинанні

За поперечного згинання в перерізах стержня крім згинальних моментів діють і поперечні сили, з якими пов’язані дотичні напруження. Щоб вивести формулу для їх визначення, розглянемо консольну балку прямокутного перерізу, навантажену зосередженою силою на вільному кінці (рис. 11.6).

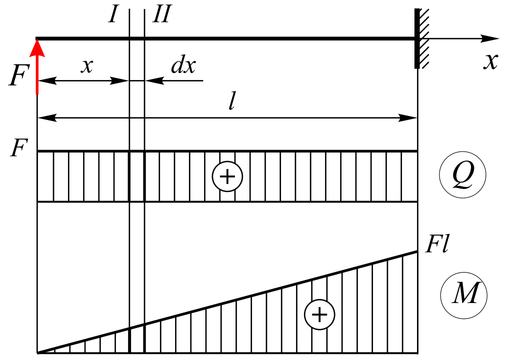

Рис. 11.6. Балка в умовах поперечного згинання

Виріжмо двома суміжними площинами елемент балки dx. В обох перерізах I і II діють, згідно з епюрою Q, однакові за величиною поперечні сили. Згинальні моменті в цих перерізах різні: M і $M+dM$ відповідно (див. рис. 11.7 а). При дії вказаних зусиль в перерізах маються місце нормальні і дотичні напруження.

Нормальні напруження в перерізах I II знаходимо за формулою Нав’є (11.6). Ці напруження для довільного шару волокон відповідно дорівнюватимуть:

$$\sigma' = \frac{M}{I_z} y; \quad \sigma'' = \frac{M + dM}{I_z} y. \tag{11.11}$$

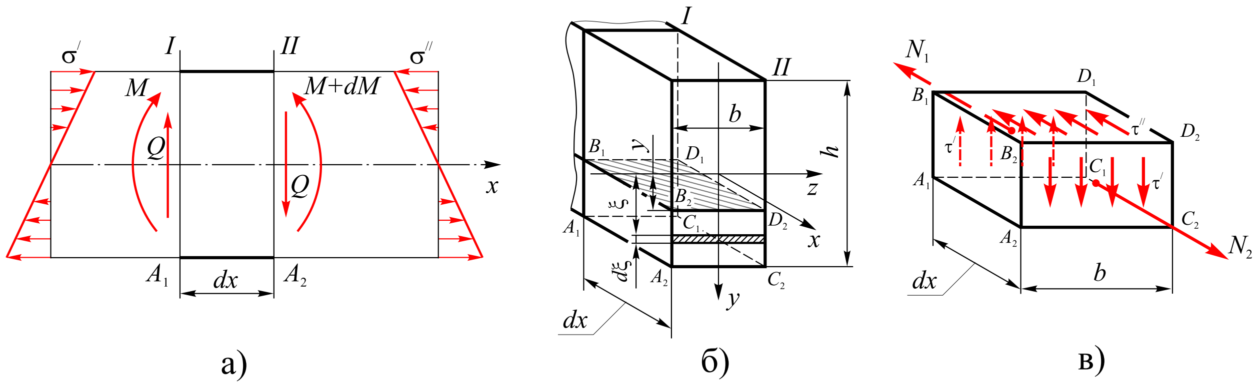

Рис. 11.7. До визначення дотичних напружень при згинанні: а – схема навантажування елемента балки; б – схема виділення частини елемента балки; в – схема навантажування частини елемента балки

Епюри нормальних напружень представлені на рис. 11.7 а.

Щоб знайти дотичні напруження, сформулюємо деякі припущення щодо характеру їх розподілу в поперечному перерізі.

1. Дотичні напруження τ в перерізі паралельні поперечній силі Q.

2. В даному шарі волокон на відстані y від нейтрального шару дотичні напруження однакові за величиною по всій ширині перерізу.

Примітка 11.1. ***Ці припущення справедливі лише для перерізів зі співвідношенням сторін $h/b > 2$, коли поперечна сила паралельна стороні h.***

Далі площиною, паралельною нейтральному шару балки, на відстані y від нього відріжемо частину елемента стержня (рис. 11.7 б). Розглянемо умови рівноваги елементарного паралелепіпеда $A_1A_2B_1B_2C_1C_2D_1D_2$. Для цього спочатку проаналізуємо, які сили діють у його гранях.

Грані $A_1A_2B_1B_2$, $C_1C_2D_1D_2$ і $A_1A_2C_1C_2$ належать бічній поверхні стержня, вільній від навантаження, тому тут жодні сили не діють.

У грані $A_1B_1C_1D_1$ діють нормальні σ' і дотичні τ' напруження. Знайдемо рівнодійну нормальних напружень $N_1 = \int\limits_A \sigma' dA$. Тут елементарна площадка $dA = bd\xi$ знаходиться на відстані ξ від нейтральної лінії перерізу (рис. 11.7 б). Тоді

$$N_1 = \int\limits_A \frac{M}{I_z}\xi dA = \frac{M}{I_z}\int\limits_A \xi dA .$$

Тут $\int\limits_A \xi dA = S_z(y)$ – статичний момент площі грані $A_1B_1C_1D_1$ відносно осі z, тобто частини площі поперечного перерізу, розташованої між шаром волокон на рівні y та краєм балки. Отже

$$N_1 = \frac{M}{I_z} S_z(y). \tag{11.12}$$

Аналогічно знайдемо рівнодійну N_2 на грані $A_2B_2C_2D_2$:

$$N_2 = \frac{M + dM}{I_z} S_z(y). \tag{11.13}$$

Розглянемо тепер грань $B_1B_2D_1D_2$. Нормальними напруженнями на цій грані, які виникають за рахунок бічного тиску між волокнами при згинанні балки, нехтуємо через їх малість. Дотичні напруження τ'' тут виникають згідно з законом парності дотичних напружень, оскільки діють дотичні напруження τ' на ортогональних гранях (рис. 11.7 в). Через малість грані $B_1B_2D_1D_2$ (один її розмір dx) вважатимемо напруження τ'' рівномірно розподіленими, а їх рівнодійна

$$dT = \tau'' b dx = \tau b dx$$

Запишемо рівняння рівноваги елемента, спроектувавши сили на вісь X:

$$\sum X = N_2 - N_1 - dT = 0,$$

або

$$\frac{M + dM}{I_z} S_z(y) - \frac{M}{I_z} S_z(y) - \tau b dx = 0.$$

Звідси

$$\tau b dx = \frac{dM}{I_z} S_z(y).$$

Враховуючи, що $dM/dx = Q$, остаточно отримаємо:

$$\boxed{\tau = \frac{QS_z(y)}{bI_z}} \tag{11.14}$$

Дану формулу вперше вивів Д.І. Журавський, відомий російський інженер українського походження, чиє ім'я ця формула і носить.

Для прямокутного перерізу статичний момент

$$S_z(y) = b(0,5h - y)\left(y + \frac{0,5h - y}{2}\right) = b(0,5h - y)(0,5y + 0,25h) = \frac{bh^2}{8}\left(1 - \frac{4}{h^2}y^2\right).$$

Тоді, беручи до уваги, що для прямокутника $I_z = \frac{bh^3}{12}$, отримаємо:

$$\tau = \frac{Q}{b}\frac{bh^2}{8}\left(1 - \frac{4}{h^2}y^2\right)\frac{12}{bh^3} = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh}\left(1 - \frac{4}{h^2}y^2\right). \tag{11.15}$$

З наведеної формули випливає, що залежність між дотичними напруженнями в перерізі при поперечному згинанні і положенням шару волокон відносно нейтральної лінії параболічна. В крайніх точках перерізу при $y = h/2$ $\tau = 0$. Найбільші дотичні напруження виникатимуть у нейтральному шарі, коли y=0:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\frac{Q}{bh} = \frac{3}{2}\frac{Q}{A}. \tag{11.16}$$

Епюра розподілу дотичних напружень по висоті прямокутного перерізу зображена на рис. 11.8.

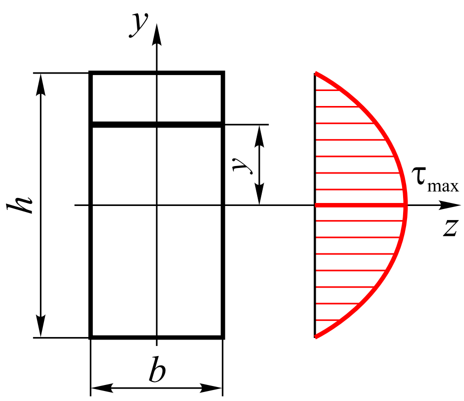

Рис. 11.8. Епюра дотичних напружень для прямокутного перерізу

Хоча формула Журавського була виведена для прямокутних перерізів зі співвідношенням $h/b > 2$, тим не менше на практиці нею можна скористатися для перерізів будь-якої форми, за виключенням вузьких прямокутників, розташованих так, що силова лінія паралельна до меншої сторони *b*. Такі перерізи нами будуть розглянути пізніше.

Отже, для довільного перерізу формулу Журавського можна записати в такому вигляді:

$$\tau = \frac{QS_z(y)}{b(y)I_z}. \qquad (11.17)$$

Тут $b(y)$ – ширина перерізу на тому рівні, де визначаються дотичні напруження, і яка для довільного перерізу буде величиною змінною.

Приклад 11.2 *Скориставшись даними прикладу* 11.1, *порівняти найбільші дотичні напруження в перерізах за двох варіантів їх розташування (рис.* 11.5*), припустивши, що крім згинальних моментів у перерізі балки діятиме ще й сила Q.*

***Варіант* 1**. *Найбільше дотичне напруження знайдемо за формулою для прямокутника (*11.16*).*

$$\tau^{(1)}_{\max} = 1{,}5\frac{Q}{a^2}.$$

***Варіант* 2**. *Найбільше дотичне напруження, яке виникає у нейтральному шарі, знайдемо за формулою (*11.16*). Для нашого перерізу* $S_z(y) = S_{z\max} = A'h' = \left(\frac{a^2}{2}\right)\frac{1}{3}\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$. *Тут* A' *– площа трикутника ABC, яка дорівнює половині площі квадрата (рис.* 11.5*), а* h' *– відстань від центра ваги цього трикутника до осі z. Тоді*

$$\tau^{(2)} = \frac{QS_z(y)}{b(y)I_z} = \frac{Q\cdot 12}{\sqrt{2}a\cdot a^4}\cdot\frac{a^3}{6\sqrt{2}} = \frac{Q}{a^2}.$$

Отже $\tau^{(1)}_{\max}/\tau^{(2)}_{\max} = 1{,}5$, *тобто дотичні напруження за першим варіантом розташування перерізу у півтора рази перевищують напруження за другим варіантом розташування.*

Тема 11.3. Аналіз напруженого стану стержня по висоті перерізу за плоского поперечного згинання. Розрахунок на міцність

Виходячи з характеру розподілу діючих при поперечному згинанні напружень, робимо висновок, що напружений стан в перерізах стержнів неоднорідний, і це має враховуватись у розрахунках на міцність.

Розглянемо шарнірно оперту двоопорну балку (рис. 11.9).

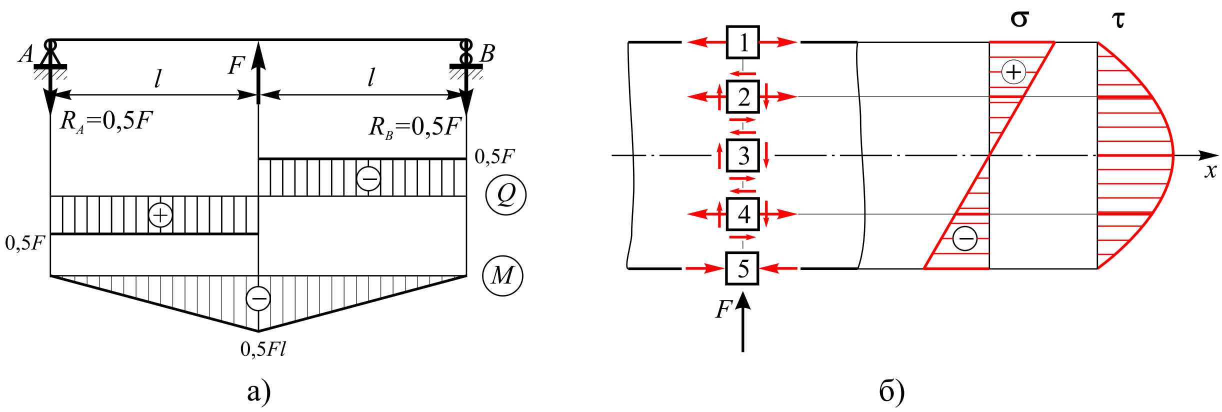

Рис. 11.9. До аналізу напруженого стану балки при поперечному згинанні: а – схема навантажування балки та епюри зусиль; б – напружений стан в точках по висоті перерізу балки

В довільному перерізі балки, крім опорних перерізів *A* і *B*, одночасно діють поперечні сили і згинальні моменти, епюри яких представлені на рис. 11. 9 а. На рис. 11.9 б зображені епюри розподілу нормальних і дотичних напружень по висоті перерізу. Виберемо ряд точок в перерізі стержня та проаналізуємо напружений стан в них.

Точка 1. Це найвіддаленіша від нейтрального шару точка. Тут $\sigma = \sigma_{\max} = \dfrac{M}{W}$; $\tau = 0$.

Маємо лінійний напружений стан, і умова міцності для цієї точки запишеться так:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W} \le [\sigma]. \tag{11.18}$$

Точка 2. Тут

$$\sigma = \frac{M}{I_z} y; \qquad \tau = \frac{QS_z(y)}{b(y) I_z}.$$

Має місце плоский напружений стан. Щоб перевірити точку 2 на міцність, слід скористатися відповідним критерієм міцності, залежно від матеріалу балки.

Визначимо головні напруження в цій точці. Згідно з формулою (4.46) (див. лекцію 7)

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right); \qquad \sigma_2 = 0; \qquad \sigma_3 = \frac{1}{2}\left(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right).$$

Якщо матеріал балки *крихкий*, то слід скористатися критерієм найбільших нормальних напружень (перша теорія міцності). Умова міцності за цією теорією

$$\sigma_p^I = \sigma_1 = \frac{1}{2}\left(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right) \le [\sigma]. \tag{11.19}$$

Якщо матеріал балки *пластичний*, то скористаємось критерієм найбільших дотичних напружень (третя теорія міцності) або критерієм найбільшої потенціальної енергії формозміни (четверта теорія міцності). За цими теоріями розрахункові напруження відповідно дорівнюють:

$$\sigma_p^{III} = \sigma_1 - \sigma_3;$$

$$\sigma_p^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Підставляючи знайдені вирази для головних напружень, отримаємо умови міцності в такому вигляді:

$$\sigma_p^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]; \tag{11.20}$$

$$\sigma_p^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma]. \tag{11.21}$$

Якщо матеріал балки *по-різному опирається розтяганню і стисканню*, то слід скористатися критерієм Мора (п’ята теорія міцності):

$$\sigma_p^V = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{cm}}\sigma_3.$$

Позначивши $[\sigma]_p / [\sigma]_{cm} = m$, отримаємо умову міцності:

$$\sigma_p^V = \frac{1-m}{2}\sigma + \frac{1+m}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]. \tag{11.22}$$

Точка 3. Ця точка належить нейтральному шару, де $\sigma = 0$; $\tau = \tau_{\max}$. Умова міцності:

$$\tau_{\max} = \frac{QS_{\max}}{bI_z} \le [\tau]. \qquad (11.23)$$

Точка 4. Тут умови міцності аналогічні до умов міцності для точки 2.

Точка 5. Як і у точці 1, тут має місце лінійний напружений стан. Якщо відстань від нейтрального шару до точки 5 така ж, як до точки 1, тобто переріз симетричний відносно осі *z*, то умова міцності для точки 5 записується аналогічно до умови (11.18). Оскільки в нашому прикладі в цій точці діють стисні напруження, отримаємо таку умову міцності:

$$\left|\sigma_{\max}\right| = \frac{M}{W} \le [\sigma]_{cm}. \qquad (11.24)$$

Якщо ця точка знаходиться ближче до нейтрального шару, ніж точка 1, то умову міцності слід записати так:

$$\sigma'_{\max} = \frac{M}{I_z} y^{(5)} \le [\sigma]_{cm}. \qquad (11.25)$$

Тут $\sigma'_{\max}$ – напруження у точці 5, і вони є найбільшими напруженнями стискання в перерізі; $y^{(5)}$ – відстань від нейтрального шару до точки 5.

Примітка 11.2. ***Якщо матеріал стержня однаково опирається розтяганню і стисканню, то перевіряти слід лише точки 1, 2 і 3.***

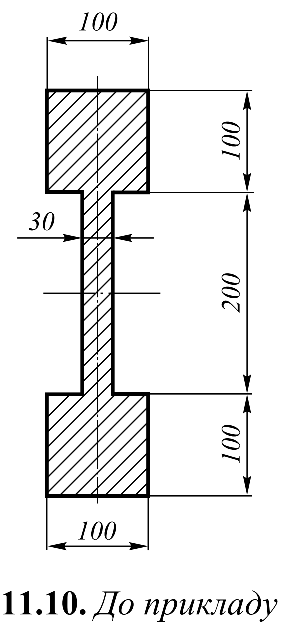

Рис. 11.10. *До прикладу* 11.3

Приклад 11.3. *Визначити запаси міцності у потенційно небезпечних точках балки, зображеної на рис.*11.9 *а, прийнявши* $F = 700$ *кН*, $l = 1$ *м*. *Поперечний переріз балки зображений на рис.* 11.10. *Матеріал балки – сталь з границею текучості* $\sigma_T = 250$ *МПа*.

1. *Згідно з епюрами зусиль (рис.* 11.9 *а), небезпечний переріз знаходиться посередині балки, де діє максимальний згинальний момент* $M_{\max} = 0,5Fl = 0,5 \cdot 700 \cdot 1 = 350$ *кН·м і поперечна сила* $Q = 0,5F = 0,5 \cdot 700 = 350$ *кН*.

2. *Знайдемо головний центральний момент інерції перерізу.*

Оскільки переріз має дві осі симетрії, то ці осі і є головними центральними осями інерції.

Щоб знайти моменти інерції відносно осі z, розіб'ємо переріз на складові: прямокутник I і два однакових квадрати II і III (рис. 11.11). Тоді

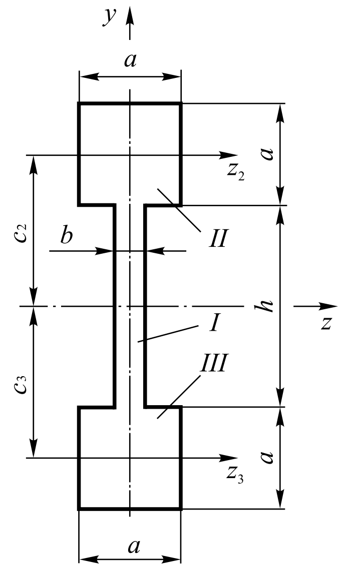

Рис. 11.11. *До прикладу 11.3*

$$I_z = I_{z_I} + I_{z_{II}} + I_{z_{III}} = \frac{bh^3}{12} + 2\left(\frac{a^4}{12} + c_2^2 A_2\right) =$$

$$= \frac{30 \cdot 200^3}{12} + 2\left(\frac{100^4}{12} + 150^2 \cdot 100^2\right) = 48666{,}67 \cdot 10^4 \ мм^4.$$

Момент опору перерізу:

$$W_z = \frac{I_z}{y_{\max}} = \frac{48666{,}67 \cdot 10^4}{200} = 243{,}33 \cdot 10^4 \ мм^3$$

3. *Побудуємо епюри розподілу напружень по висоті перерізу балки.*

3.1. *Епюра нормальних напружень.*

Знайдемо величину максимального нормального напруження:

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W_z} = \frac{350 \cdot 10^6}{243{,}33 \cdot 10^4} = 143{,}84 \ МПа$$

На нейтральній лінії перерізу (вісь z) $\sigma = 0$.

За цими значеннями будуємо епюру нормальних напружень (рис. 11.12). Беручи до уваги що, згідно зі схемою навантаження (рис. 11.9 а), верхні волокна балки розтягнені, нормальні напруження в цих волокнах будуть додатними.

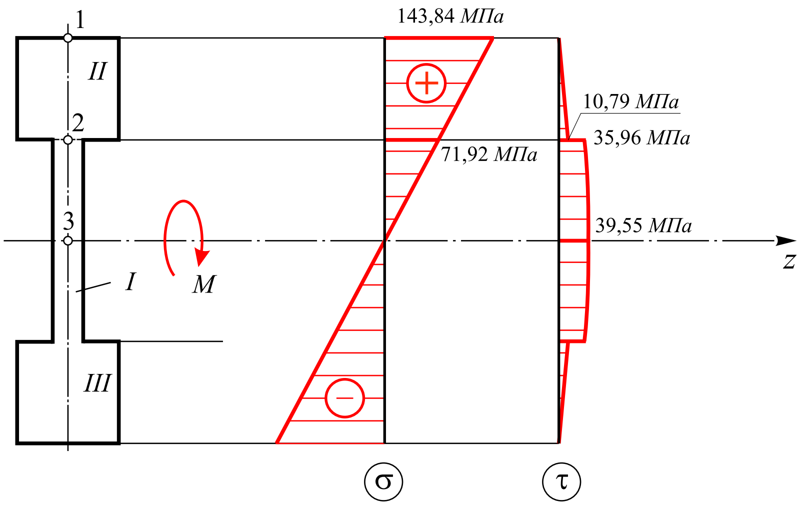

Рис. 11.12. Епюри напружень в перерізі балки при поперечному згинанні

3.2. *Для побудови епюри дотичних напружень обчислимо їх значення в точках, вказаних на рис.* 11.12.

***Точка* 1**. *Дотичні напруження відсутні:* $\tau = 0$.

***Точка* 2**. *Статичний момент площі, розташованої вище рівня точки 2, тобто квадрата II*

$$S_z^{(II)} = A_2 c_2 = 100^2 \cdot 150 = 150 \cdot 10^4 \ мм^3.$$

Щоб визначити дотичні напруження для цього рівня відносно нейтральної лінії, слід розглянути насправді дві точки: 2^{*}*, що належить стороні квадрата II, і* 2^{**}*, що належить стороні прямокутника I, оскільки ширина перерізу b(y) в цих точках різна.*

Для точки 2^{*}

$$\tau^{(2*)} = \frac{QS_z^{II}}{b^{(2*)}I_z} = \frac{350\cdot 10^3 \cdot 150\cdot 10^4}{100\cdot 48666{,}67\cdot 10^4} = 10{,}79\ \text{МПа}\,.$$

Для точки 2^{**}

$$\tau^{(2**)} = \frac{QS_z^{II}}{b^{(2**)}I_z} = \frac{350\cdot 10^3 \cdot 150\cdot 10^4}{30\cdot 48666{,}67\cdot 10^4} = 35{,}96\ \text{МПа}\,.$$

***Точка* 3**. *Статичний момент площі половини перерізу відносно осі z*

$$S_z = S_z^{(II)} + S_z^{(I**)} = 150\cdot 10^4 + 100\cdot 30\cdot 50 = 165\cdot 10^4\ \text{мм}^3.$$

Тоді

$$\tau^{(3)} = \tau_{\max} = \frac{QS_z}{b^{(2**)}I_z} = \frac{350\cdot 10^3 \cdot 165\cdot 10^4}{30\cdot 48666{,}67\cdot 10^4} = 39{,}55\ \text{МПа}\,.$$

4. *Знайдемо запаси міцності балки в указаних точках.*

***Точка* 1**. *Тут* $\sigma_{\max} = 143{,}84$ *МПа*. *Запас міцності*

$$n_1 = \frac{\sigma_т}{\sigma_{\max}} = \frac{250}{143{,}84} = 1{,}74\,.$$

***Точка* 2****. *Тут* $\sigma = \dfrac{M}{I_z}y^{(2)} = \dfrac{350\cdot 10^6}{48666{,}67\cdot 10^4}100 = 71{,}92$ *МПа* ; $\tau^{(2**)} = 35{,}96$ *МПа* .

$$\sigma_p^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{71{,}92^2 + 4\cdot 35{,}96^2} = 101{,}71\ \text{МПа}\,.$$

$$n_{2**} = \frac{\sigma_т}{\sigma_p^{III}} = \frac{250}{101{,}71} = 2{,}46\,.$$

***Точка* 3**. *Тут* $\tau_{\max} = 39{,}55$ *МПа* . *Поклавши* $\tau_т = 0{,}5\sigma_т = 0{,}5\cdot 250 = 125$ *МПа* , *знаходимо, що*

$$n_3 = \frac{\tau_т}{\tau_{\max}} = \frac{125}{39{,}55} = 3{,}16\,.$$

З отриманих результатів робимо висновок, що найменший запас міцності маємо в точці 1 *перерізу. Отже небезпечними є крайні точки перерізу розглянутої балки.*