

Лекція №10

Розділ 5. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ І ЖОРСТКІСТЬ СТЕРЖНІВ: ОСНОВНІ ПРИНЦИПИ

Ми розглянули методи визначення компонент внутрішніх зусиль у перерізах стержня, основи теорії напружено-деформованого стану тіла в точці. Проте, як визначати напруження і деформації в навантаженому тілі, ми поки що не знаємо. Завданням даного розділу є формулювання загальних підходів та базових принципів з визначення напружень і деформацій у стержнях та оцінки їх міцнісної надійності.

Тема 5.1. Інтегральні умови рівноваги для стержнів

Розглянемо переріз стержня у загальному випадку його навантаження (рис. 5.1).

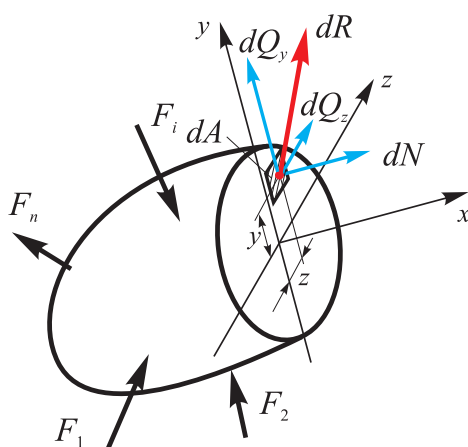


Рис. 5.1. Компоненти зусиль в площадці dA перерізу стержня

Повне напруження в площадці dA перерізу, згідно з (4.2), $p = dR/dA$. За аналогією запишемо вирази для його компонент:

$$\sigma_x = \frac{dN}{dA}; \quad \tau_{xy} = \frac{dQ_y}{dA}; \quad \tau_{xz} = \frac{dQ_z}{dA}. \quad (5.1)$$

Враховуючи формули (5.1) та беручи до уваги означення для зусиль в перерізі (див. п.3.1.1, лекція №4), запишемо загальні співвідношення між компонентами головного вектора та головного моменту зусиль у перерізі N , Q_y , Q_z , $M_{кр}$, M_y , M_z та компонентами напружень в даній точці перерізу.

$$N = \int_A dN = \int_A \sigma_x dA; \quad (5.2)$$

$$Q_y = \int_A dQ_y = \int_A \tau_{xy} dA; \quad (5.3)$$

$$Q_z = \int_A dQ_z = \int_A \tau_{xz} dA; \quad (5.4)$$

$$M_{кр} = \int_A dM_{кр} = \int_A (zdQ_y - ydQ_z) = \int_A (z\tau_{xy} - y\tau_{xz})dA \quad (5.5)$$

$$M_y = \int_A dM_y = \int_A \sigma_x z dA \quad (5.6)$$

$$M_z = \int_A dM_z = \int_A \sigma_x y dA \quad (5.7)$$

Отримані формули називають *інтегральними рівняннями рівноваги для стержнів*. Тут компоненти внутрішніх зусиль, що стоять у лівих частинах рівнянь, легко знаходяться, наприклад з епюр. Проте добуті залежності безпосередньо використати для визначення напружень не можна, оскільки невідомий закон їх розподілу в перерізі.

Задача визначення напружень у перерізі завжди є статично невизначною.

Тому для розв'язання цієї задачі спочатку встановлюють закон розподілу напружень у його перерізах, керуючись певними міркуваннями та спостереженнями за характером деформування стержня, а вже потім знаходять за формулами (5.2) – (5.7) й самі напруження.

В подальшому при визначенні напружень в стержнях завжди дотримуватимемось такого порядку дій.

1. Розглядатимемо *статичний бік задачі*.

Тут записуються ті з інтегральних рівнянь рівноваги (5.2) – (5.7), які відносяться до даного виду деформації стержня.

2. Розглядатимемо *геометричний бік задачі*.

На цьому етапі для даного виду деформації встановлюються залежності між переміщеннями точок стержня та їх положенням у перерізі відносно вибраної системи координат. Виконують це на підставі експериментальних досліджень та в рамках певних гіпотез.

Отримані рівняння називають *геометричними рівняннями*.

3. Розглядається *фізичний бік задачі*.

За результатами експериментального дослідження фізико-механічних властивостей матеріалу стержня встановлюється залежність між напруженнями та деформаціями (або переміщеннями).

Ці залежності називають *фізичними рівняннями*. В рамках прийнятої в опорі матеріалів гіпотези про лінійну пружність матеріалу фізичні рівняння базуються на законі Гука.

4. Виконується *синтез*.

Розв'язуючи спільно статичні, геометричні і фізичні рівняння, отримуємо формули для визначення напружень через зусилля в перерізі.

Тема 5.2. Принцип Сен-Венана

Цей принцип є одним з базових при визначенні напружень і деформацій в елементах конструкцій, в тому числі і в стержнях.

Розглянемо тіло, навантажене двома способами: рівномірно розподіленим (рис. 5.1 а) і нерівномірно розподіленим навантаженнями (рис. 5.1 б).

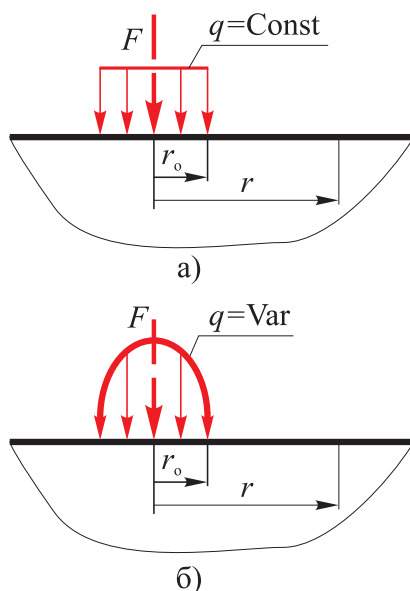


Рис. 5.2. Варіанти навантаження тіла: рівномірно розподілене (а) і нерівномірно розподілене навантаження (б)

При цьому рівнодійні цих навантажень $F = \int_{A_0} q dA_0$ однакові. Такі

системи, до речі, називаються *статично еквівалентними*.

Розміри площадок розподілу навантажень набагато менші від розмірів тіла.

За таких умов справедливим є *принцип Сен-Венана*:

Якщо тіло навантажити статично еквівалентними системами сил, при цьому розміри зон прикладання навантажень малі в порівнянні з розмірами тіла, то в його точках, досить віддалених від зон навантаження, напруження і деформації не залежать від способу прикладання навантажень.

Тут слід зробити кілька зауважень.

По-перше, принцип Сен-Венана досі немає теоретичного доведення для загального випадку. Разом з тим для всіх отриманих точних розв'язків він виконувався. Отже цей принцип відноситься до так званих *евристичних принципів*: справедливий для широкого класу задач, проте не має загального доведення.

По-друге, немає точної відповіді, якою має бути мінімальна відстань r (рис. 5.2), щоб принцип Сен-Венана виконувався. Вважається що ця відстань має бути не меншою від максимального розміру зони прикладання навантаження.

Не зважаючи на деяку невизначеність в кількісних оцінках, справедливості принципу Сен-Венана експериментально доведена, а його фізична суть дуже важлива для інженерних розрахунків. Він дає можливість значно спростити крайові умови задачі, якщо визначаються напруження і деформації на деякій відстані від зони прикладання навантаження.

Зрозуміло, що безпосередньо в зоні навантаження і поблизу неї закони розподілу напружень і деформацій залежатимуть від способу прикладання навантажень. Тут принцип Сен-Венана не діє.

Тема 5.3. Оцінка міцнісної надійності деформованого тіла. Запас міцності

Для кількісної оцінки міцнісної надійності конструкції та її елементів користуються *ймовірністю безвідмовної роботи*. Тобто в основу оцінки покладено імовірнісний підхід, що базується на значній кількості статистичних даних, отриманих експериментальним шляхом або в результаті експлуатації виробів протягом певного часу.

Ймовірністю події називається число, яке характеризує можливість, що подія відбудеться.

Зокрема, ймовірність вірогідної події беруть рівною одиниці, а ймовірність неможливої події – рівною нулю.

Якщо в результаті n експериментів подія спостерігалась m разів, то її ймовірність

$$P = \frac{m}{n}. \quad (5.8)$$

Зміст цього виразу дуже простий. Наприклад, зі ста виробів за час їх експлуатації (*ресурсу*) відмовили десять. Отже ймовірність безвідмовної роботи виробу складає $P = (100 - 10)/100 = 0,9$.

На практиці часто користуються іншою характеристикою – *ймовірністю відмови*:

$$F = 1 - P. \quad (5.9)$$

Проте визначити ймовірність відмови чи безвідмовної роботи виробу на стадії його проектування дуже складно.

На сьогоднішній основний метод оцінки міцнісної надійності конструкції є визначення запасів міцності.

Запасом міцності або *коефіцієнтом запасу* називають відношення:

$$n = \frac{g_{zp}}{g_{\max}}. \quad (5.10)$$

Тут g_{zp} – граничне значення деякого параметру (сила, напруження і т.д.), за якого порушується роботоздатність виробу; $g_{\max}$ – максимальне значення цього параметру в умовах експлуатації.

На сьогодні в практиці інженерних розрахунків найчастіше в якості такого параметру беруть напруження. Саме напруження, точніше напружений стан тіла в точці, є критерієм міцнісної надійності конструкції.

Державними та галузевими стандартами встановлюються допустимі значення коефіцієнтів запасу $[n]$. Тоді умову міцнісної надійності можна записати як

$$n \geq [n]. \quad (5.11)$$

Отже, загальний порядок розрахунку на міцність є таким.

1. На основі аналізу визначається точка в тілі, де напружений стан небезпечний.

Примітка 5.1. Для стержнів ця точка лежить в небезпечному перерізі, де діють максимальні зусилля. Знаходять ці перерізи за допомогою епюр.

2. Знайдені напруження в цій точці порівнюють з граничними для даного матеріалу, знайденими експериментально, і встановлюють реальний запас міцності.
3. Вибравши допустиме значення коефіцієнту запасу $[n]$, перевіряють виконання умови міцнісної надійності (5.11).

Умову міцнісної надійності можна записати через напруження. В цьому випадку її називають умовою міцності:

$$\sigma \leq [\sigma]. \quad (5.12)$$

Тут $[\sigma]$ – допустиме напруження для матеріалу, яке знаходять як

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{гп}}}{n}, \quad (5.13)$$

де n – коефіцієнт запасу; $\sigma_{\text{гп}}$ – граничне напруження для матеріалу, яке визначають експериментально.

Слід зауважити, що умовою міцності (5.12) напряду скористатися можна лише в деяких дуже простих випадках навантаження, скажімо в умовах, коли в небезпечній точці тіла реалізується лінійний напружений стан (в цьому ми переконуємося пізніше). В загальному випадку, коли в точці тіла має місце складний напружений стан, зліва в (5.12) має стояти деяка функція головних напружень, яку конкретизують в рамках певних теорій міцності.

Крім напружень часто приходиться контролювати деформації та переміщення елементів конструкцій під дією навантаження. Тобто виконують розрахунки на жорсткість, порівнюючи дійсні значення переміщень і деформацій з допустимими.

Примітка 5.2. Розрахунок на міцність в інженерній практиці вважається основним, а розрахунок на жорсткість, як правило, – перевірний.

Вибір методів розрахунку міцнісної надійності пов'язаний також з умовами роботи конструкцій. Потрібно враховувати характер навантаження (статичний чи динамічний), брати до уваги такі явища, як циклічність

навантаження, втрату стійкості елементів конструкції, що виникають в процесі її експлуатації.

Питання для самоперевірки знань

1. Скільки компонент внутрішніх зусиль виникає в перерізах стержня в загальному випадку його навантаження? Назвіть їх.
2. Перелічіть найпростіші випадки деформацій стержня.
3. Запишіть інтегральні рівняння рівноваги стержня для чистого розтягу-стиску та чистого згину.
4. Чому інтегральні рівняння рівноваги для стержня є статично невизначеними?
5. Які сторони задачі слід розглянути при розкритті статичної невизначеності системи інтегральних рівнянь рівноваги стержня?
6. В чому полягає статичний бік задачі?
7. Які рівняння називають геометричними при визначенні напружень у стержнях?
8. Який закон використовують для запису фізичних рівнянь при розв'язанні інтегральних рівнянь рівноваги в опорі матеріалів?
9. Які системи сил називають статично еквівалентними?
10. Сформулюйте принцип Сен-Венана.
11. Які принципи в математиці називають евристичними?
12. Якою має бути відстань від зони прикладання навантаження в тілі, щоб принцип Сен-Венана виконувався?
13. Які переваги дає принцип Сен-Венана при проведенні розрахунків на міцність і жорсткість елементів конструкцій?
14. Що називають ймовірністю події?
15. Ймовірність якої події дорівнює одиниці?
16. Чому дорівнює ймовірність неможливої події?
17. Як визначити ймовірність відмови?
18. Для партії виробів у кількості 500 одиниць ймовірність безвідмовної роботи $P = 0,98$. Яка кількість виробів з партії може відмовити за період експлуатації?
19. При проведенні випробувань 37 зразків витримали випробування, а чотири – відмовили. Яка ймовірність відмови для дослідженої партії зразків?
20. Який метод оцінки міцнісної надійності є на сьогодні основним?
21. Що називається запасом міцності?
22. Які параметри називають граничними, коли мова йде про міцнісну надійність виробу?
23. Яка фізична величина найчастіше береться в якості критерію міцнісної надійності в інженерних розрахунках?
24. Запишіть умову міцнісної надійності.
25. Що називають допустимим напруженням?
26. Найбільше напруження в тілі складає 180 МПа, а допустиме напруження – 160 МПа. Чи виконується умова міцності?
27. Чому дорівнює коефіцієнт запасу міцності, коли граничне напруження для матеріалу $\sigma_{\text{гп}} = 300$ МПа, а діюче напруження – $\sigma_{\text{мах}} = 150$ МПа?
28. Чому дорівнює допустиме напруження (див. п. 27), якщо допустимий коефіцієнт запасу $[n] = 1,5$?
29. Як називають розрахунок, де контролюються деформації або переміщення в конструкції?
30. Чи вважатиметься роботоздатним елемент конструкції, для якого умова жорсткості виконується, а умова міцності не виконується?

Розділ 6 РОЗТЯГАННЯ І СТИСКАННЯ СТЕРЖНІВ. МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ ЗА ЧИСТОГО РОЗТЯГУ І СТИСКУ

Тема 6.1. Визначення напружень і деформацій за розтягу-стиску.

Розглянемо прямий стержень довільного постійного перерізу, навантажений на торцях двома силами, які діють вздовж його осі (рис. 6.1).

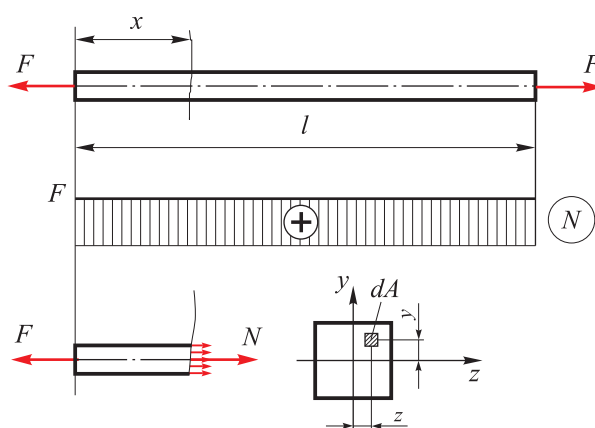


Рис. 6.1. Стержень в умовах чистого розтягання

В околі деякої точки перерізу виділимо площадку dA . Оскільки в перерізах стержня діють лише поздовжні сили N , то є підстави стверджувати, що в цій площадці виникатимуть лише нормальні напруження.

Виведемо формулу для визначення напружень в перерізі, дотримуючись порядку дій, який був описаний в темі 5.1.

1. Статичний бік задачі.

Для чистого розтягу маємо:

$$N = \int_A \sigma dA \quad (6.1)$$

2. Геометричний бік задачі.

Дослід свідчить: коли на бічну поверхню стержня нанести систему прямих ліній, перпендикулярних до його осі, то за розтягання чи стискання стержня ці лінії переміщуватимуться паралельно самим собі.

Якщо цей висновок віднести до всього перерізу, то справедливою буде гіпотеза плоских перерізів.

За розтягу-стиску поперечні перерізи стержня, плоскі до деформації, залишаються плоскими і після неї, переміщуючись поступально вздовж осі стержня.

Виділимо в стержні поздовжній елемент довжиною l і перерізом dA (рис. 6.1). Його називають *волокном*.

Примітка 6.1. Поняття волокна ми вже користувались при побудові епюр для стержнів при згині.

Згідно з гіпотезою плоских перерізів, всі волокна на даній ділянці стержня деформуються однаково. Тобто їх відносна деформація є величиною сталою і не

залежить від положення площадки dA , по якій волокно перетинається з перерізом, в системі координатних осей y і z (рис. 6.1):

$$\varepsilon(y, z) = \text{Const} \quad (6.2)$$

Це запис геометричного рівняння для розтягу стиску.

3. Фізичний бік задачі.

За розтягу-стиску в точках стержня реалізується *лінійний напружений стан*. Дійсно, в площадці dA відсутні дотичні напруження. Отже – це головна площадка. В інших головних напрямках напруження не виникають, оскільки відсутні зовнішні сили, що могли б їх викликати. Відсутній також бічний тиск між волокнами.

Якщо матеріал підлягає закону Гука, то для лінійного напруженого стану можна записати:

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (6.3)$$

4. Синтез.

Підставляємо (6.3) в (6.1):

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A E\varepsilon dA.$$

Враховуючи (6.2), отримаємо умову $E\varepsilon = \text{Const}$. Тоді $N = E\varepsilon A$. Звідси

$$\varepsilon = \frac{N}{EA}. \quad (6.4)$$

Отже, за розтягу-стиску напруження в перерізі є величиною сталою (тобто має місце однорідний напружений стан) і обчислюється за формулою:

$$\sigma = \frac{N}{A}. \quad (6.5)$$

В межах ділянки, де $N = \text{Const}$, $E = \text{Const}$ і $A = \text{Const}$, – а саме таким умовам відповідає стержень, що нами розглядається (рис. 6.1), – відносне видовження одиниці довжини є величиною сталою:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} = \text{Const}. \quad (6.6)$$

Тобто деформація стержня рівномірна (див. примітку 4.12, лекція №8), а його абсолютне видовження $\varepsilon = \Delta l/l$. Або, з урахуванням (6.6),

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} \quad (6.7)$$

Цей вираз є записом закону Гука в абсолютних величинах для розтягу-стиску.

У формулі (6.7) знаменник EA називають *жорсткістю перерізу стержня за розтягу-стиску*, а відношення EA/l – *жорсткістю стержня*. Дійсно, чим більшою буде це відношення, тим меншим буде абсолютне видовження стержня при однаковому навантаженні. Тобто стержень буде *жорсткішим*.

Користуючись виразом (6.7), можна обчислити величину зміщення будь-якого перерізу стержня відносно вибраної точки відліку. Так, переміщення перерізу x відносно лівого торця стержня (рис. 6.1) буде

$$\Delta l(x) = \frac{Nx}{EA}.$$

Як бачимо, найбільше переміщення відносно лівого торця стержня отримає правий його торець. Це переміщення дорівнюватиме абсолютному видовженню стержня $\Delta l = Nl/EA$.

Якщо на стержень діє складне навантаження, він має змінний по довжині переріз, то формулою (6.7) можна скористатися лише в межах малої ділянки dx , де $N(x)$ і $A(x)$ можна вважати постійними. Тоді

$$\Delta(dx) = \frac{N(x)dx}{EA(x)}.$$

Звідси сумарне видовження стержня

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(x)dx}{EA(x)}. \quad (6.8)$$

В окремому випадку стержень може мати постійний переріз в межах певних ділянок (так званий *східчастий стержень*), і поздовжня сила також може бути незмінною на частині довжини стержня. Якщо таких ділянок n , то отримаємо суму:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \frac{N_i l_i}{EA_i}. \quad (6.9)$$

Приклад 6.1 Побудувати епюри поздовжніх сил і напружень в стержні, що виникають під дією його власної ваги (рис. 6.2 а). Побудувати епюру переміщень перерізів стержня відносно заземлення та визначити його видовження, якщо довжина стержня $l = 2$ м, площа перерізу стержня $A = 4 \cdot 10^4$ мм². Питома вага матеріалу, з

якого виготовлений стержень,

$\gamma = 7,85 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$, а модуль пружності

$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

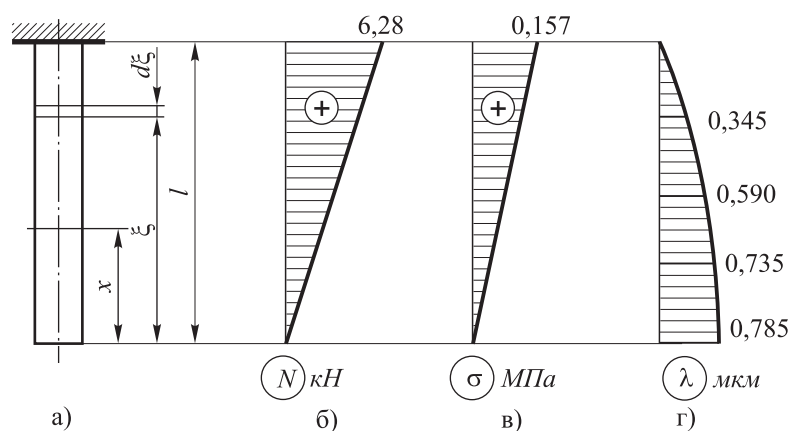


Рис. 6.2. До прикладу 6.1: а) – розрахункова схема стержня;
б) – епюра поздовжніх сил; в) – епюра напружень;
г) – епюра переміщень

Побудуємо епюру поздовжніх сил. Оскільки стержень навантажений лише власною вагою, то маємо одну ділянку. У довільному перерізі на відстані x від вільного кінця стержня маємо:

$$I \quad 0 \leq x \leq l$$

$$N(x) = \gamma A x.$$

Максимальне зусилля діє в защемленні і дорівнює $N_{\max} = 7,85 \cdot 10^4 \cdot 4 \cdot 10^{-2} \cdot 2 = 6280 \text{ Н}$.
При $x=0$ $N(x) = 0$.

Будуємо епюру поздовжніх сил (рис. 6.2 б).

Нормальне напруження у довільному перерізі $\sigma = N(x)/A = \gamma x$. Епюра напружень також обмежена прямою лінією (рис. 6.2 в), яка проходить через кінці ординат: при $x=0$ $\sigma = 0$; при $x=l$ $\sigma = \gamma l = 7,85 \cdot 10^4 \cdot 2 = 15,7 \cdot 10^4 \text{ Па} = 0,157 \text{ МПа}$.

Щоб побудувати епюру переміщень перерізів стержня відносно защемлення, знайдемо переміщення довільного перерізу, що знаходиться на відстані x від вільного кінця. Воно дорівнюватиме видовженню частини стержня, що знаходиться вище від перерізу, під дією його власної ваги. Оскільки сила ваги змінюється по довжині стержня, то для визначення переміщення скористаємось формулою (6.8), взявши для розгляду елемент стержня $d\xi$ на відстані ξ від вільного кінця:

$$\lambda(x) = \int_x^l \frac{N(\xi) d\xi}{EA} = \int_x^l \frac{\gamma A \xi d\xi}{EA} = \frac{\gamma}{2E} \xi^2 \Big|_x^l = \frac{\gamma}{2E} (l^2 - x^2).$$

Як бачимо, епюра переміщень описується квадратною параболою. Щоб її побудувати, знайдемо значення переміщень кількох перерізів:

$$\text{— при } x=0 \quad \lambda = \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{7,85 \cdot 10^4 \cdot 2^2}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11}} = 0,0785 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,785 \text{ мкм};$$

- при $x=0,5$ м $\lambda = \frac{7,85 \cdot 10^4}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11}} (2^2 - 0,5^2) \cdot 10^6 = 0,735$ мкм ;
- при $x=1$ м $\lambda = \frac{7,85 \cdot 10^4}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11}} (2^2 - 1^2) \cdot 10^6 = 0,590$ мкм ;
- при $x=1,5$ м $\lambda = \frac{7,85 \cdot 10^4}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11}} (2^2 - 1,5^2) \cdot 10^6 = 0,345$ мкм ;
- при $x=2$ м $\lambda = 0$.

Видовження стержня дорівнює переміщенню вільного кінця відносно защемлення, тому $\Delta l = 0,785$ мм.

Зауваження. Видовження стержня можна також знайти, замінивши розподілене навантаження його рівнодійною, що дорівнює вазі стержня. Прикладена ця сила в центрі ваги, що знаходиться посередині довжини стержня. Тоді видовження стержня дорівнюватиме абсолютній деформації частини стержня, що розміщена вище від центру ваги. Тобто

$$\Delta l = \frac{\gamma A l \cdot 0,5l}{EA} = \frac{7,85 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11}} 10^6 = 0,785 \text{ мкм}.$$

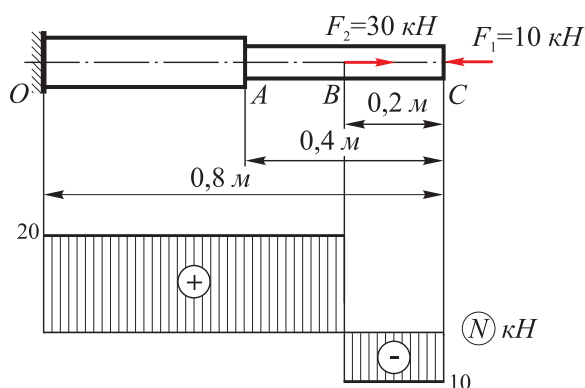


Рис. 6.3. До прикладу 6.2

Приклад 6.2 Східчастий стержень (рис. 6.3) навантажений силами F_1 і F_2 , які діють вздовж його осі. Площа поперечного перерізу стержня на ділянці AC складає 200 мм^2 , а на ділянці OA – 400 мм^2 . Знайти величину і напрямок переміщень точок прикладання сил відносно опори O, якщо модуль пружності матеріалу $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, а коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,25$.

Спочатку побудуємо епюру поздовжніх сил.

Маємо дві ділянки: CB і BO.

Ділянка CB: $0 \leq x \leq 0,2$ м

$$N(x) = -F_1 = -10 \text{ кН}.$$

Ділянка BO: $0,2 \text{ м} \leq x \leq 0,8 \text{ м}$

$$N(x) = F_1 - F_2 = -10 + 30 = 20 \text{ кН}.$$

Оскільки стержень східчастий, то для визначення переміщень у ньому скористаємось формулою (6.9).

Переміщення точки прикладання сили F_1 – точки C – дорівнює абсолютній деформації всього стержня:

$$\lambda_{CO} = \Delta l_{CB} + \Delta l_{BA} + \Delta l_{AO} = \frac{N_{CB} l_{CB}}{EA_{CB}} + \frac{N_{BA} l_{BA}}{EA_{BA}} + \frac{N_{AO} l_{AO}}{EA_{AO}} =$$

$$= \frac{(-10) \cdot 10^3 \cdot 200}{2 \cdot 10^5 \cdot 200} + \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 200}{2 \cdot 10^5 \cdot 200} + \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 400}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} = 1,5 \text{ мм}$$

Переміщення точки прикладання сили F_2 – точки B – дорівнює абсолютній деформації частини стержня OB :

$$\lambda_{BO} = \Delta l_{BA} + \Delta l_{AO} = \frac{N_{BA} l_{BA}}{EA_{BA}} + \frac{N_{AO} l_{AO}}{EA_{AO}} =$$

$$= \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 200}{2 \cdot 10^5 \cdot 200} + \frac{20 \cdot 10^3 \cdot 400}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} = 2 \text{ мм}$$

Обидва переміщення вийшли додатними, тобто спрямовані від опори в бік видовження стержня.

Тема 6.2 Потенціальна енергія деформації стержня за розтягу-стиску.

Оскільки за розтягу-стиску в точках стержня реалізується лінійний напружений стан, то, згідно з формулою (4.80), питома потенціальна енергія в цьому випадку дорівнюватиме

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}, \quad (6.10)$$

а потенціальна енергія деформація, накопичена в усьому стержні –

$$U = \int_V u dx dy dz = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dx dy dz. \quad (6.11)$$

Або

$$U = \int_l dx \int_A \frac{\sigma^2}{2E} dy dz = \int_l dx \int_A \frac{\sigma^2}{2E} dA = \int_l dx \int_A \frac{1}{2E} \left[\frac{N(x)}{A(x)} \right]^2 dA. \quad (6.12)$$

Остаточно отримаємо:

$$U = \int_l \frac{N^2(x) dx}{2EA(x)}. \quad (6.13)$$

Цю формулу можна також отримати, виходячи з того, що робота зовнішніх сил переходить без втрат в потенціальну енергію деформації тіла.

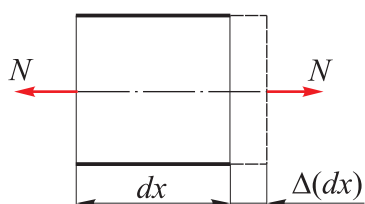


Рис. 6.4. До визначення потенціальної енергії деформації стержня за розтягу-стиску

Виділимо елемент стержня dx (рис. 6.4). Робота сили N , яка для елемента є зовнішньою,

$$dA_p = \frac{1}{2} N \Delta(dx) = dU.$$

Враховуючи, що за законом Гука $\Delta(dx) = Ndx/EA$, для всього стержня отримаємо:

$$U = \int_l \frac{N^2(x) dx}{2EA}.$$

Приклад 6.3 Знайти потенціальну енергію, накопичену в елементах стержневої системи (рис. 6.5) при її деформуванні силою $F=0,5$ кН, якщо $l = 0,6$ м; площі перерізів стержнів $A_1 = 400$ мм² (стержень АВ) і $A_2 = 500$ мм² (стержень АС). Матеріал стержня АВ -- сталь з модулем пружності $E_1 = 2 \cdot 10^5$ МПа, а стержня АС – латунь з модулем пружності $E_2 = 1 \cdot 10^5$ МПа. Шарнірні з'єднання в системі вважати ідеальними.

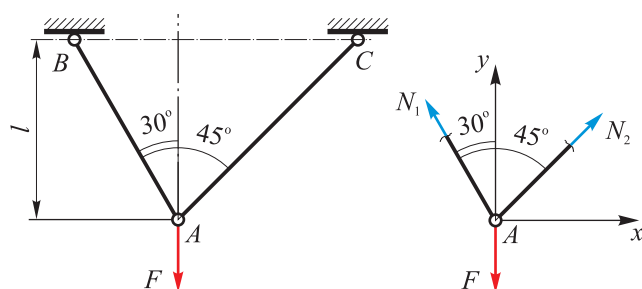


Рис. 6.5. До прикладу 6.3

Згідно з принципом незалежності дії сил потенціальну енергію деформації системи знайдемо як суму потенціальних енергій деформації кожного стержня зокрема:

$$U = U_{AB} + U_{AC}.$$

Слід, перш за все, знайти зусилля в стержнях. Очевидно, що коли шарніри ідеальні, тобто жодного опору прокрутання стержнів в шарнірах немає, в перерізах стержня виникатимуть лише поздовжні сили (рис. 6.5). Маємо систему сил, що сходиться в одній точці.

Знайдемо невідомі зусилля з рівнянь рівноваги в проекціях на осі:

$$\sum X = -N_1 \sin 30^\circ + N_2 \cos 45^\circ = 0;$$

$$\sum Y = -F + N_1 \cos 30^\circ + N_2 \sin 45^\circ = 0.$$

З першого рівняння маємо: $N_2 = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 45^\circ} N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} N_1$. Підставляючи отримане співвідношення в друге рівняння, знаходимо:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}N_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}N_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = F.$$

Звідси $N_1 = 0,732F = 0,732 \cdot 0,5 = 0,366 \text{ кН}$. Тоді $N_2 = 0,707N_1 = 0,707 \cdot 0,366 = 0,259 \text{ кН}$.

Таким чином, згідно з умовою, для кожного зі стержнів маємо постійні по довжині жорсткості перерізів ($E_1A_1 = \text{Const}$ і $E_2A_2 = \text{Const}$) і постійні поздовжні сили N_1 і N_2 . Тоді вираз для енергії (6.13) набуває виду

$$U = \frac{N_1^2}{E_1A_1} \frac{l}{\cos 30^\circ} + \frac{N_2^2}{E_1A_1} \frac{l}{\cos 45^\circ}.$$

Підставляючи значення, отримаємо:

$$U = \frac{0,366^2 \cdot 10^6 \cdot 0,6}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 400 \cdot 10^{-6} \cdot 0,866} + \frac{0,259^2 \cdot 10^6 \cdot 0,6}{2 \cdot 1 \cdot 10^{11} \cdot 500 \cdot 10^{-6} \cdot 0,707} = 5,8 \cdot 10^{-4} + 5,7 \cdot 10^{-4} = 11,5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$