Лекція №9

Тема 4.3. Узагальнений закон Гука

Досі напружений і деформований стани розглядалися нами окремо. Хоча зрозуміло, що напруження і деформації – величини взаємопов'язані, і між компонентами напруженого і деформованого станів існують певні залежності.

Згідно зі сформульованими раніше гіпотезами матеріал деформованого тіла розглядається як суцільне однорідне ізотропне середовище. На цій підставі можна стверджувати, що:

– за властивістю однорідності залежності між напруженнями і деформаціями будуть однаковими в усіх точках тіла;

– за властивістю ізотропності вони не залежатимуть від вибору системи координат, і, що дуже важливо, головні осі напружень і деформацій збігатимуться;

– оскільки середовище суцільне, то, трактуючи його як неперервний математичний простір, залежності між напруженнями і деформаціями будуть неперервними функціями.

4.3.1. Закон Гука для головних осей напружень і деформацій

В загальному випадку функціональні залежності між напруженнями і деформаціями можна подати в такому вигляді:

$$\varepsilon_1 = f_1\left(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\right);\ \varepsilon_2 = f_2\left(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\right);\ \varepsilon_3 = f_3\left(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3\right). \qquad (4.62)$$

Експериментально встановлено, що в пружній області залежність між напруженнями і деформаціями для більшості конструкційних матеріалів можна прийняти лінійною. Вперше це було показано Робертом Гуком для розтягу і стиску. Тому закон пружного пропорційного деформування називається *законом Гука*.

Отже, з урахуванням закону Гука функції (4.62) – лінійні. Запишемо їх в загальному вигляді.

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_{11}\sigma_1 + e_{12}\sigma_2 + e_{13}\sigma_3 \\ \varepsilon_2 = e_{21}\sigma_1 + e_{22}\sigma_2 + e_{23}\sigma_3\,. \\ \varepsilon_3 = e_{31}\sigma_1 + e_{32}\sigma_2 + e_{33}\sigma_3 \end{cases} \qquad (4.63)$$

На підставі принципу незалежності дії сил (див. тему 1.1, лекція 1) напруження і деформації в пружному тілі, викликані деякою силою, не залежать від інших сил, прикладених до тіла. Як наслідок, напруження чи деформації в тілі, викликані групою сил, можна знайти як суму напружень чи деформацій, викликаних кожною силою зокрема.

Згідно з цим принципом кожну з головних деформацій можна представити як суму трьох складових. Наприклад,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}. \tag{4.64}$$

Тут у правій частині рівняння перший індекс вказує на напрямок деформації, а другий – на фактор, що цю деформацію викликає. Тобто ε_{11} – відносна лінійна деформація в напрямку σ_1, викликана дією лише σ_1; ε_{12} – відносна лінійна деформація в напрямку σ_1, викликана дією лише σ_2; ε_{13} – відносна лінійна деформація в напрямку σ_1, викликана дією лише σ_3.

Оскільки напруження σ_1, σ_2, σ_3 – ортогональні, то по відношенню до σ_1 деформація ε_{11} є *поздовжньою*, а деформації ε_{12} і ε_{13} – *поперечними*.

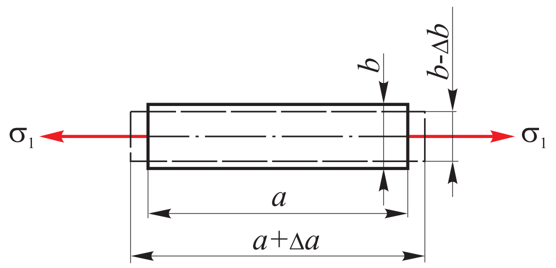


Рис. 4.34. Поздовжня та поперечна деформації елемента

Численні експерименти показали, що поздовжня і поперечна деформації, викликані даним напруженням, мають протилежні знаки. Так за розтягу в напрямку σ_1 $\varepsilon_{11} > 0$, а $\varepsilon_{12} < 0$ і $\varepsilon_{13} < 0$ (рис. 4.34).

Тут поздовжня деформація $\varepsilon_{11} = \dfrac{\Delta a}{a}$; поперечна деформація $\varepsilon_{12} = -\dfrac{\Delta b}{b}$.

Абсолютна величина поперечної деформації завжди менша від абсолютної величини поздовжньої деформації, причому величина їх відношення для даного матеріалу та умов випробувань не залежить від величини деформації до певного рівня навантаження і називається коефіцієнтом Пуассона або коефіцієнтом поперечної деформації.

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_{попер}}{\varepsilon_{поздв}} \right| < 1 \text{ або } \mu = \left| \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_{ii}} \right| < 1. \tag{4.65}$$

Якщо порівняти рівняння (4.63) з рівнянням (4.64), то є очевидним, що поздовжні і поперечні деформації відповідно дорівнюють:

$$\varepsilon_{ii} = e_{ii}\sigma_i \ \ (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{4.66}$$

$$\varepsilon_{ij} = e_{ij}\sigma_i \ \ (i = 1,\ 2,\ 3;\ j = 1,\ 2,\ 3;\ i \neq j). \tag{4.67}$$

Очевидно, що для ізотропного матеріалу поперечна деформація, викликана даним напруженням є величиною сталою в будь-якому напрямку. Тобто $\varepsilon_{21} = \varepsilon_{31}$; $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{32}$; $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23}$. Очевидним є також те, що однакові напруження $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ викликатимуть однакові як поздовжні, так і поперечні деформації: $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}$; $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{21} = \varepsilon_{31} = \varepsilon_{32}$. Враховуючи (4.66) та (4.67), можна записати, що $e_{11} = e_{22} = e_{33}$; $e_{12} = e_{13} = e_{23} = e_{21} = e_{31} = e_{32}$.

Коефіцієнти e_{ii} і e_{ij} називають *пружними сталими матеріалу*.

Розглянемо лінійний напружений стан: $\sigma_1 \neq 0$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Рівняння системи (4.63) набувають виду:

$$\varepsilon_1 = e_{11}\sigma_1;$$
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = e_{21}\sigma_1.$$

Коефіцієнт при поздовжній деформації прийнято позначати у вигляді

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = \frac{1}{E},$$

де E – *модуль пружності за розтягу* або *модуль Юнга*, який визначається з досліду на розтяг.

З (4.65) $\varepsilon_{ij} = \mu\varepsilon_{ii}$ або $e_{ij}\sigma_i = \mu e_{ii}\sigma_i$. Тобто $e_{ij} = \mu e_{ii}$, а звідси $e_{ij} = \dfrac{\mu}{E}$.

Отже, для ізотропного однорідного матеріалу маємо *дві незалежні пружні сталі*: модуль пружності та коефіцієнт Пуассона.

Враховуючи знак поперечної деформації, остаточно рівняння (4.63) запишемо у вигляді:

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu\left(\sigma_3 + \sigma_1\right)\right]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right]. \end{aligned}} \qquad (4.68)$$

Отримані рівняння (4.68) є записом *узагальненого закону Гука* для ізотропного матеріалу.

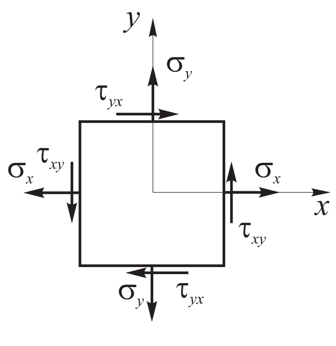


Рис. 4.35. *До прикладу* 4.12

Приклад 4.12 *Елемент (рис. 4.35) знаходиться в умовах плоского напруженого стану. Знайти величину і напрямок головних деформацій, якщо напруження на його гранях* $\sigma_x = 80$ *МПа*, $\sigma_y = 40$ *МПа*, $\tau_{xy} = 60$ *МПа*. *Матеріал елемента – сірий чавун з модулем пружності* $E = 1{,}15 \cdot 10^5$ *МПа та коефіцієнтом Пуассона* $\mu = 0{,}23$.

Знайдемо величини головних напружень, скориставшись співвідношеннями для оберненої задачі плоского напруженого стану (4.46)*:*

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{1}{2}\left[\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}\right] = \frac{1}{2}\left[80 + 40 \pm \sqrt{\left(80-40\right)^2 + 4\cdot 60^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(120 \pm 126{,}5\right)\ МПа$$

Звідси $\sigma_1 = \sigma_{max} = 123{,}25\ МПа$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = \sigma_{min} = -3{,}25\ МПа$.

Головні деформації знайдемо за законом Гука (4.68)*:*

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \mu\sigma_3\right) = \frac{1}{1{,}15\cdot 10^5}\left(123{,}25 + 0{,}23\cdot 3{,}25\right) = 1{,}08\cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\mu}{E}\left(\sigma_3 + \sigma_1\right) = -\frac{0{,}23}{1{,}15\cdot 10^5}\left(-3{,}25 + 123{,}25\right) = -0{,}24\cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \mu\sigma_1\right) = \frac{1}{1{,}15\cdot 10^5}\left(-3{,}25 - 0{,}23\cdot 123{,}25\right) = -0{,}27\cdot 10^{-3}.$$

Вважаючи матеріал ізотропним, напрямки головних осей деформацій знайдемо за формулою (4.47)*, адже для ізотропного матеріалу головні осі деформацій збігаються з головними осями напружень:*

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\cdot 60}{80-40} = 3.$$

Звідси $\alpha = 35{,}78°$.

Головні осі напружень і деформацій елемента показані на рис. 4.36.

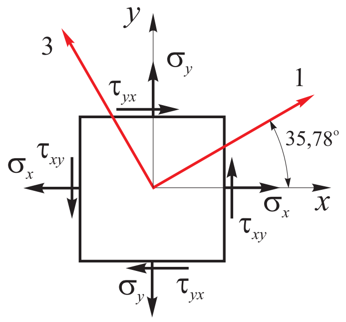


Рис. 4.36. *Головні осі напружень і деформацій*

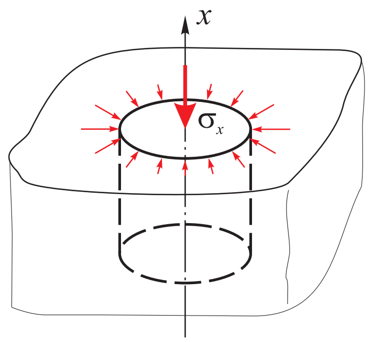


Рис. 4.37. *До прикладу* 4.13

Приклад 4.13 *Циліндричний елемент, виготовлений з однорідного ізотропного матеріалу, вставлений без зазору в отвір у абсолютно жорсткій плиті (рис. 4.37), стискається в поздовжньому напрямку. Нормальне напруження в цьому напрямку складає* $\sigma_x = -100\ МПа$*. Знайти, чому дорівнює октаедричне нормальне напруження в елементі, якщо коефіцієнт Пуассона матеріалу* $\mu = 0{,}33$*. Тертям на поверхні елемента знехтувати.*

При стисканні елемент мав би деформуватися у поперечному напрямку, а саме – розширюватись. Проте через абсолютну жорсткість плити жодних переміщень в цьому напрямку не буде. Тобто, з боку стінок на елемент діятиме рівномірно розподілений по поверхні тиск. Враховуючи осьову симетрію задачі, можна стверджувати, що на будь-яких *двох взаємно перпендикулярних площадках, паралельних осі x елемента, діятимуть однакові стисні нормальні напруження.*

Оскільки тертя на контактних поверхнях елемента відсутні, значить відсутні й дотичні напруження на них. Отже нормальні напруження σ_x, σ_y, σ_z *є головними напруженнями.*

Напруження σ_y *і* σ_z *знайдемо з умови, що деформації у поперечному напрямку відсутні. Користуючись законом Гука, запишемо умову:*

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right] = 0.$$

Враховуючи, що $\sigma_y = \sigma_z$, *отримаємо:*

$$\sigma_y = \sigma_z = \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x = -\frac{0,33}{1-0,33}100 \approx -49,25\ \text{МПа}.$$

Маємо такі головні напруження: $\sigma_1 = \sigma_2 = -49,25$ *МПа;* $\sigma_3 = -100$ *МПа. Тоді октаедричне нормальне напруження складає*

$$\sigma_{окт} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = -\frac{49,25 + 49,25 + 100}{3} \approx -66,17\ \text{МПа}.$$

4.3.2. Закон Гука для неголовних осей напружень і деформацій

Перейдемо до неголовних осей напружень і деформацій x, y і z.

Припустимо, що спрямовуючі косинуси осі x в системі головних осей деформацій l_1, m_1, n_1. Тоді, згідно з (4.59),

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 l_1^2 + \varepsilon_2 m_1^2 + \varepsilon_3 n_1^2. \tag{4.69}$$

Перепишемо (4.68), додаючи й віднімаючи в правій частині першого рівняння $\mu\sigma_1$, другого рівняння – $\mu\sigma_2$, третього рівняння – $\mu\sigma_3$. Тоді закон Гука набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left[\left(1+\mu\right)\sigma_1 - \mu I_{\sigma 1}\right];\\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left[\left(1+\mu\right)\sigma_2 - \mu I_{\sigma 1}\right];\\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left[\left(1+\mu\right)\sigma_3 - \mu I_{\sigma 1}\right].
\end{aligned} \tag{4.70}$$

Тут $I_{\sigma 1} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$ – перший інваріант тензора напружень.

Тоді

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\left(1+\mu\right)\left(\sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2\right) - \mu I_{\sigma 1}\left(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2\right)\right].$$

Враховуючи (4.31), і те, що $l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1$, отримаємо

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[(1+\mu)\sigma_x - \mu I_{\sigma 1}\right].$$

Для відносного зсуву γ_{xy}, згідно з (4.60),

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_1 l_1 l_2 + 2\varepsilon_2 m_1 m_2 + 2\varepsilon_3 n_1 n_2 .$$

Тут l_2, m_2, n_2 – спрямовуючі косинуси осі y в системі головних осей деформацій. Підставляючи (4.70), отримаємо

$$\gamma_{xy} = \frac{2}{E}\left[(1+\mu)\left(\sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2\right) - \mu I_{\sigma 1}\left(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2\right)\right].$$

Враховуючи (4.32), і те, що сума добутків спрямовуючих косинусів перпендикулярних відрізків $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$, запишемо:

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} .$$

Тут величину, обернену до коефіцієнта при τ_{xy}, прийнято позначати через G:

$$\boxed{G = \frac{E}{2(1+\mu)}}, \tag{4.71}$$

і називають *модулем зсуву*.

Таким чином формула (4.71) встановлює взаємозв’язок між пружними сталими матеріалу.

Остаточно отримаємо запис узагальненого закону Гука для неголовних осей напружень і деформацій:

$$\boxed{\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]; \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right]; \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]; \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \end{aligned}}. \tag{4.72}$$

Примітка 4.13. ***В рівняннях (4.72), коли*** $\tau_{ij} = 0$***, то й*** $\gamma_{ij} = 0$***. Тобто це підтверджує висновок, зроблений вище, що головні осі напружень і деформацій для ізотропного матеріалу збігаються.***

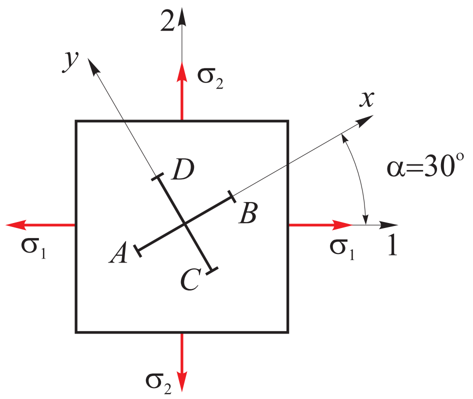


Рис. 4.38. *До прикладу* 4.14

Приклад 4.14 *Знайти лінійні деформації взаємно перпендикулярних відрізків АВ і DC елемента (рис.* 4.38*), що знаходиться в умовах плоского напруженого стану, та відносний зсув між ними, якщо напруження на його гранях* $\sigma_1 = 50$ *МПа*, $\sigma_2 = 30$ *МПа*. *Модуль пружності матеріалу елемента* $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ *МПа*, *а коефіцієнт Пуассона* $\mu = 0{,}28$.

З умови задачі випливає, що грані елемента є головними площадками. Отже визначатимемо деформації для неголовних напрямків.

Задача має два варіанти розв'язку.

Варіант 1. *За законом Гука (4.68) знайдемо спочатку головні деформації:*

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \mu\sigma_2\right) = \frac{1}{2{,}1 \cdot 10^5}\left(50 - 0{,}28 \cdot 30\right) = 19{,}8 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \mu\sigma_1\right) = \frac{1}{2{,}1 \cdot 10^5}\left(30 - 0{,}28 \cdot 50\right) = 7{,}6 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\mu}{E}\left(\sigma_1 + \sigma_2\right) = -\frac{0{,}28}{2{,}1 \cdot 10^5}\left(50 + 30\right) = -10{,}7 \cdot 10^{-5}.$$

За формулою (4.59) знайдемо лінійні деформації ε_x *і* ε_y *відрізків АВ і DC відповідно.*

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 l_x^2 + \varepsilon_2 m_x^2 + \varepsilon_3 n_x^2 .$$

Тут $l_x = \cos 30° = 0{,}866$ – *спрямовуючий косинус осі x відносно головної осі* 1; $m_x = \cos(-60°) = 0{,}5$ – *спрямовуючий косинус осі x відносно головної осі* 2; $n_x = \cos 90° = 0$ – *спрямовуючий косинус осі x відносно головної осі* 3.

$$\varepsilon_x = 19{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}866^2 + 7{,}6 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}5^2 - 10{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot 0 = 16{,}8 \cdot 10^{-5} .$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_1 l_y^2 + \varepsilon_2 m_y^2 + \varepsilon_3 n_y^2 ,$$

де l_y, m_y, n_y – *спрямовуючи косинуси осі y відносно головних осей, які відповідно дорівнюють* $l_y = \cos 120° = -0{,}5$; $m_y = \cos 30° = 0{,}866$; $n_y = \cos 90° = 0$. *Тоді*

$$\varepsilon_y = 19{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot \left(-0{,}5\right)^2 + 7{,}6 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}866^2 - 10{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot 0 = 10{,}6 \cdot 10^{-5} .$$

Відносний зсув між напрямками відрізків АВ і DC, згідно з формулою (4.60), дорівнюватиме

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_1 l_x l_y + 2\varepsilon_2 m_x m_y + 2\varepsilon_3 n_x n_y = 2 \cdot 19{,}8 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}866 \cdot \left(-0{,}5\right) + 2 \cdot 7{,}6 \cdot 10^{-5} \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}866 -$$
$$- 2 \cdot 10{,}7 \cdot 10^{-5} \cdot 0 = -10{,}6 \cdot 10^{-5}.$$

Знак „-” свідчить про те, що кут між напрямками x і y збільшиться.

Варіант 2. *Знайдемо спочатку напруження у площадках, перпендикулярних до напрямків x і y. Тобто розв'яжемо пряму задачу плоского напруженого стану. Скористаємось формулами (*4.43*) – (*4.45*).*

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha = 50\cos^2 30° + 30\sin^2 30° = 50\cdot 0,75 + 30\cdot 0,25 = 45\ МПа.$$

$$\sigma_y = \sigma_1 \sin^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\alpha = 50\sin^2 30° + 30^2\cos 30° = 50\cdot 0,25 + 30\cdot 0,75 = 35\ МПа.$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha = \frac{50-30}{2}0,866 = 8,66\ МПа\ .$$

*За законом Гука (*4.72*) знайдемо лінійні деформації в заданих напрямках.*

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right) = \frac{1}{2,1\cdot 10^5}\left(45 - 0,28\cdot 35\right) = 16,8\cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right) = \frac{1}{2,1\cdot 10^5}\left(35 - 0,28\cdot 45\right) = 10,6\cdot 10^{-5}.$$

*Щоб знайти відносний зсув між осями x і y, визначимо за формулою (*4.71*) модуль зсуву матеріалу:*

$$G = \frac{E}{2\left(1+\mu\right)} = \frac{2,1\cdot 10^5}{2\left(1+0,28\right)} = 0,82\cdot 10^5\ МПа\ .$$

Тоді

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{8,66}{0,82\cdot 10^5} = 10,6\cdot 10^{-5}\ .$$

Зауваження. *За першим варіантом розв'язку, на відміну від другого варіанту, ми змогли знайти не лише величину відносного зсуву між напрямками x і y, але і його знак. Проте для інженерних розрахунків знак зсуву, насправді, принципового значення не має.*

4.3.3. Закон Гука для об'ємної деформації

Складемо рівняння (4.68). Після деяких перетворень отримаємо:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\left(1-2\mu\right)\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)\right]. \qquad (4.73)$$

Це рівняння встановлює залежність між першими інваріантами тензора деформацій і тензора напружень. Оскільки перший інваріант тензора деформацій дорівнює об'ємній деформації, то, з урахуванням (4.61), можна записати *закон Гука для об'ємної деформації*:

$$\boxed{\varepsilon_V = \frac{\left(1-2\mu\right)}{E}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)}. \qquad (4.74)$$

Значний інтерес складає окремий випадок об'ємного напруженого стану – всебічний рівномірний стиск, про який ішла мова в п. 4.1.4 (див. лекцію №6), коли в точці діють однакові за величиною стисні головні напруження.

Подібні умови можна реалізувати, зануривши кулю в рідину на певну глибину. За законом Паскаля тиск на її поверхні буде рівномірним. При цьому напруження в усіх напрямках будуть однаковими, тобто однаковими будуть головні напруження. Вони дорівнюватимуть величині тиску на поверхні кулі, який називають *гідростатичним тиском*:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p\,. \tag{4.75}$$

Для даного випадку рівняння (4.74) набуде вигляду:

$$\varepsilon_V = -\frac{3(1-2\mu)}{E}\,p = -\frac{p}{K}\,, \tag{4.76}$$

де *K – модуль об'ємної деформації*

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}\,. \tag{4.77}$$

Згідно з формулою (4.74) для матеріалів, у яких коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,5$, об'ємна деформація $\varepsilon_V = 0$. Тобто при навантажуванні об'єм тіла не змінюється. Такі матеріали називають *нестисливими*, В якості прикладу практично нестисливого матеріалу можна навести гуму, коефіцієнт Пуассона для якої $\mu = 0,45$.

Приклад 4.15 *Користуючись результатами розв'язку задачі (див. приклад 4.13), обчислити величину відносної об'ємної деформації циліндричного елемента (рис. 4.37). Якою буде величина об'ємної деформації у разі, коли елемент вставити в отвір у плиті із гарантованим зазором. Модуль пружності матеріалу $E = 1{,}1\cdot 10^5$ МПа.*

Коли елемент вставлений в отвір без зазору, має місце об'ємний напружений стан. Об'ємна деформація при цьому складає

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = -\frac{1-2\cdot 0,33}{1,1\cdot 10^5}(49,25+49,25+100) = -6,13\cdot 10^{-4}.$$

Якщо елемент вставити в отвір із зазором, то при навантажуванні тиску з боку стінок отвору на його бічну поверхню не буде. Отже на елемент діятиме лише стисне напруження $\sigma_x = -100$ МПа. Тобто має місце лінійний напружений стан і об'ємна деформація дорівнюватиме

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E}\sigma_3 = -\frac{1-2\cdot 0{,}33}{1{,}1\cdot 10^5}100 = -3{,}09\cdot 10^{-4}.$$

Тема 4.4. Потенціальна енергія деформації в загальному випадку напруженого стану

При навантажуванні тіла сили, що на нього діють, виконують роботу на переміщеннях, пов'язаних з деформаціями тіла. Можна вважати, що ця робота повністю переходить в потенціальну енергію, накопичувану пружним тілом при його деформуванні. Незначні втрати енергії, переважно у вигляді тепла, що супроводжують процес деформування, нехтовно малі. Тобто, справедливою є умова

$$A_p = U, \tag{4.78}$$

де A_p – робота зовнішніх сил; U – потенціальна енергія деформації.

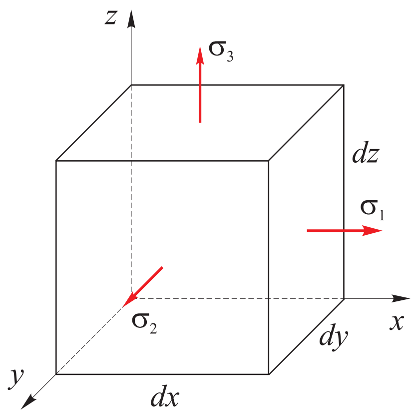


Рис. 4.39. Елемент в умовах об'ємного напруженого стану

Завдяки накопиченій енергії пружне тіло повертається до вихідного стану після зняття з нього навантаження. Пригадаймо, як веде себе в цих умовах звичайна пружина.

Знайдемо *питому потенціальну енергію деформації*, тобто енергію, накопичену в одиниці об'єму. Для цього розглянемо елемент тіла, що знаходиться в умовах об'ємного напруженого стану (рис. 4.39), грані якого є головними площадками.

Потенціальна енергія, накопичена при деформації цього елемента, дорівнюватиме сумі робіт сил, розподілених по його гранях.

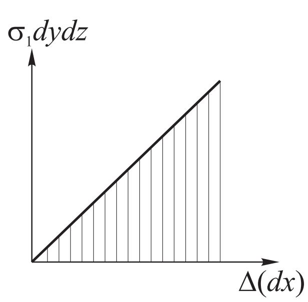


Рис. 4.40 Графік залежності сили від деформації

Сила $\sigma_1 dydz$ виконує роботу на переміщенні грані, до якої вона прикладена, а саме $\Delta(dx)$. При цьому, на підставі лінійного закону деформування – закону Гука – робота ця дорівнюватиме площі трикутника на графіку залежності сили від деформації (рис. 4.40).

На переміщеннях інших граней дана сила роботи не виконує, оскільки вона перпендикулярна до їх напрямків.

Аналогічно визначається робота решти сил, прикладених до елемента.

Далі, беручи до уваги умову (4.78), виходячи з принципу незалежності дії сил, знайдемо потенціальну енергію деформації, накопичену в елементі:

$$dU = \frac{1}{2}\sigma_1 dydz \cdot \Delta\left(dx\right) + \frac{1}{2}\sigma_2 dzdx \cdot \Delta\left(dy\right) + \frac{1}{2}\sigma_3 dxdy \cdot \Delta\left(dz\right) =$$
$$= \frac{1}{2}dxdydz\left[\sigma_1 \frac{\Delta\left(dx\right)}{dx} + \sigma_2 \frac{\Delta\left(dy\right)}{dy} + \sigma_3 \frac{\Delta\left(dz\right)}{dz}\right].$$

Оскільки головні осі напружень і деформацій збігаються, тобто $\varepsilon_x = \varepsilon_1,\ \varepsilon_y = \varepsilon_2,\ \varepsilon_z = \varepsilon_3$, можемо записати:

$$dU = \frac{1}{2}dxdydz\left(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3\right).$$

Тоді питома потенціальна енергія деформації

$$u = \frac{1}{2}\left(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3\right). \qquad (4.79)$$

З урахуванням закону Гука (4.68) отримаємо:

$$u = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]. \qquad (4.80)$$

Потенціальну енергію деформації всього тіла можна знайти, якщо взяти інтеграл по його об’єму

$$U = \int_V u dxdydz.$$

Під час деформування тіла змінюється як його об’єм, так і форма. З практичної точки зору важливо знати, яка частина енергії іде на зміну об’єму , а яка – на зміну форми. Знову таки, виходячи з принципу незалежності дії сил, формально можемо розділити:

$$u = u_o + u_ф. \qquad (4.81)$$

Тут u_o – питома потенціальна енергія зміни об’єму; $u_ф$ – питома потенціальна енергія формозміни.

Знайдемо спочатку u_o. Для цього подамо кожне з головних напружень у вигляді суми:

$$\sigma_1 = p + s_1;\ \ \sigma_2 = p + s_2;\ \sigma_3 = p + s_3. \qquad (4.82)$$

Іншими словами, розкладаємо напружений стан елемента на два (рис. 4.41). Перший являє собою всебічний рівномірний розтяг (або стиск). Другий доповнює його до заданого напруженого стану.

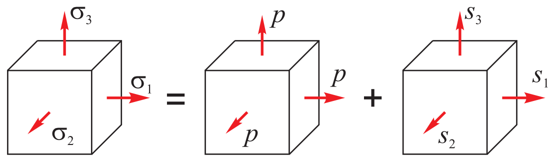


Рис. 4.41 Дві складові напруженого стану: кульова і девіаторна

Оскільки напружений стан тіла в точці характеризується тензором напружень, то можемо записати:

$$T_\sigma = T_o + D_\sigma . \qquad (4.83)$$

Тут T_o – кульовий тензор (4.19) (див. п. 4.1.4, лекція №6); D_σ – девіатор напружень.

Гідростатичний тиск p підбираємо таким чином, щоб зміна об'єму в додатковому напруженому стані не відбувалась. Тобто, компоненти кульового тензора – гідростатичний тиск p – викликають зміну об'єму елемента, а компоненти девіатора напружень s_1, s_2, s_3 –зміну його форми (звідси й походить його назва: від англійського *deviation* – відхилення).

Раз зміна об'єму у додатковому напруженому стані не відбувається, то, згідно з законом Гука для об'ємної деформації,

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E}\left(s_1 + s_2 + s_3\right) = 0 . \qquad (4.84)$$

Оскільки в загальному випадку $\mu \neq 0{,}5$, отримуємо умову:

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0 . \qquad (4.85)$$

Складаючи вирази (4.82), з урахуванням (4.85) знаходимо:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3p .$$

Звідси

$$p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} . \qquad (4.86)$$

Як бачимо, для сформульованих умов поділу напруженого стану на дві складові гідростатичний тиск дорівнює за величиною октаедричному нормальному напруженню в даній точці (див. п. 4.1.7, лекція №7).

Щоб знайти питому потенціальну енергію зміни об'єму, скористаємось формулою (4.80), підставивши в неї замість головних напружень компоненти кульового тензора:

$$u = \frac{1}{2E}\left[3p^2 - 6\mu p^2\right],$$

а з урахуванням (4.86) отримаємо:

$$u_o = \frac{1-2\mu}{6E}\left(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\right)^2. \tag{4.87}$$

Питома потенціальна енергія зміни об'єму пропорційна квадрату октаедричного нормального напруження в точці.

Енергію формозміни знайдемо як різницю

$$u_\phi = u - u_o,$$

тобто від виразу (4.80) віднімемо вираз (4.87). Після нескладних перетворень отримаємо:

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{6E}\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2\right]. \tag{4.88}$$

Питома потенціальна енергія формозміни пропорційна квадрату октаедричного дотичного напруження в точці.

Приклад 4.16 *У сталевій пластині під дією навантаження виникає плоский напружений стан. В деякій точці О з допомогою тензометрів були знайдені відносні лінійні деформації у трьох напрямках S_1, S_2, S_3 (рис. 4.42): $\varepsilon_{S_1} = 2\cdot10^{-4}$, $\varepsilon_{S_2} = -1\cdot10^{-4}$, $\varepsilon_{S_3} = 4\cdot10^{-4}$. Визначити питому потенціальну енергію деформації в точці О, якщо модуль пружності матеріалу $E = 2\cdot10^5$ МПа, а коефіцієнт Пуассона $\mu = 0,25$.*

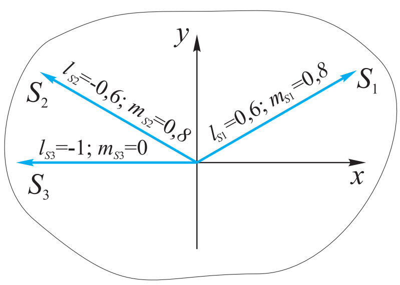


Рис. 4.42. *До прикладу* 4.16

Щоб визначити питому потенціальну енергію деформації в точці О, потрібно спочатку знайти головні напруження, що в цій точці виникають (див. формулу (4.80)).

Нам відомі лінійні деформації у трьох напрямках S_1, S_2 і S_3, заданих спрямовуючими косинусами відносно координатних осей x і y (рис. 4.42). За формулою (4.52) для визначення лінійної деформації у довільному напрямку виразимо задані деформації через лінійні та зсувні деформації в системі осей x і y:

$$\varepsilon_{Si} = \varepsilon_x l_{Si}^2 + \varepsilon_y m_{Si}^2 + \gamma_{xy} l_{Si} m_{S_i}.$$

Підставляючи задані значення, отримаємо систему рівнянь відносно деформацій у напрямку осей x і y:

$$\begin{cases} 2\cdot 10^{-4} = \varepsilon_x \cdot 0,6^2 + \varepsilon_y \cdot 0,8^2 + \gamma_{xy}\cdot 0,6\cdot 0,8; \\ -1\cdot 10^{-4} = \varepsilon_x \cdot (-0,6)^2 + \varepsilon_y \cdot 0,8^2 + \gamma_{xy}\cdot(-0,6)\cdot 0,8; \\ 4\cdot 10^{-4} = \varepsilon_x \cdot (-1)^2 + \varepsilon_y \cdot (0)^2 + \gamma_{xy}\cdot(-1)\cdot 0. \end{cases}$$

Звідси $\varepsilon_x = 4\cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_y = -1,47\cdot 10^{-4}$, $\gamma_{xy} = 3,125\cdot 10^{-4}$.

*За законом Гука знаходимо компоненти напружень в площадках, перпендикулярних до напрямків цих осей. Для цього формули для лінійних деформацій з системи (*4.72*) запишемо відносно напружень. В нашому випадку отримаємо:*

$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right) = \dfrac{2\cdot 10^5}{1-0,25^2}\left(4-0,25\cdot 1,47\right)\cdot 10^{-4} = 77,49\ \text{МПа}; \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x\right) = \dfrac{2\cdot 10^5}{1-0,25^2}\left(-1,47+0,25\cdot 4\right)\cdot 10^{-4} = -10,03\ \text{МПа}; \\ \tau_{xy} = \dfrac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} = \dfrac{2\cdot 10^5}{2(1+0,25)}3,125\cdot 10^{-4} = 25\ \text{МПа}. \end{cases}$$

Розв'язуючи обернену задачу плоского напруженого стану, знаходимо:

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{1}{2}\left[\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}\right] = \frac{1}{2}\left[77,49 - 10,03 \pm \sqrt{\left(77,49+10,03\right)^2 + 4\cdot 25^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(67,46 \pm 100,79\right)\ \text{МПа}.$$

Звідси $\sigma_1 = 84,125\ \text{МПа}$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -16,665\ \text{МПа}$.

Тоді питома потенціальна енергія деформації в точці O:

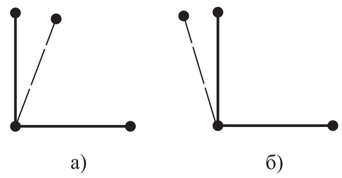
$$u = \frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\sigma_3\sigma_1\right) = \frac{1}{2\cdot 2\cdot 10^5}\left(84,125^2 + (-16,665)^2 - 2\cdot 0,25\cdot(-16,665)\cdot 84,125\right) =$$

$$= 2013,93 = 2,014\cdot 10^4\ \text{Дж}/\text{м}^3.$$

Примітка 4.14. ***В даному прикладі був розглянутий метод визначення головних напружень в елементах конструкцій, що перебувають в умовах плоского напруженого стану, яким широко користуються на практиці.***

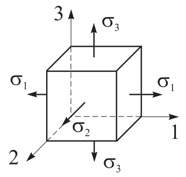
Питання для самоперевірки знань

1. Що називають деформацією тіла?
2. Що називається абсолютною деформацією відрізка?
3. В яких одиницях вимірюється абсолютна деформація?
4. Що називається лінійною деформацією тіла в точці.
5. Яку деформацію називають відносним зсувом?
6. В яких одиницях вимірюють лінійну деформацію та відносний зсув?
7. Коли відносна лінійна деформація відрізка вважається додатною?

8. 

У якому з наведених прикладів відносний зсув між напрямками двох відрізків буде від'ємний?

9. Які фізичні величини пов'язані співвідношеннями Коші? Запишіть ці співвідношення.
10. Що називають деформованим станом тіла в точці? Що потрібно знати, щоб повністю охарактеризувати деформований стан тіла в точці?
11. Які осі деформацій називаються головними?
12. Запишіть перший інваріант тензора деформацій.
13. Яка відносна деформація тіла в точці називається об'ємною?
14. Головні деформації в точці мають такі значення: 0,01; -0,004; 0,015 Чому дорівнює об'ємна деформація в цій точці?
15. Яка залежність існує між напруженнями і деформаціями твердого тіла згідно з законом Гука?
16. Яка з деформацій, викликаних даним напруженням, більша за абсолютною величиною: поздовжня чи поперечна?
17. Маємо два варіанти даних щодо деформацій, викликаних заданим напруженням:
    а) – поздовжня деформація – +0,01, поперечна – -0,003;
    б) – поздовжня деформація – +0,01, поперечна – +0,003.
    Який з наведених варіантів даних хибний?
18. Поздовжня лінійна деформація в деякому напрямку складає 1%, а поперечна (за абсолютною величиною) – 0,25%. Чому дорівнює коефіцієнт поперечної деформації матеріалу тіла?
19. Назвіть пружні сталі матеріалу. Скільки незалежних пружних сталих входить до узагальненого закону Гука для ізотропного матеріалу?
20. Скільки пружних сталих входить до закону Гука в умовах лінійного напруженого стану?

21. 

На рисунку показані головні осі напружень. Покажіть, як проходять головні осі деформацій, коли матеріал ізотропний.

22. Чому дорівнює відносний зсув в умовах всебічного рівномірного стиску?
23. Чому дорівнює коефіцієнт Пуассона для нестисливого матеріалу?
24. Чому дорівнює модуль об'ємної деформації для гуми?
25. Поясніть, чому робота сили на переміщенні точки її прикладання, пов'язаному з пружною деформацією, яку ця сила викликає, дорівнює половині їх добутку?
26. На підставі якого принципу потенціальну енергію деформації можна подати як суму енергій зміни об'єму та зміни форми?
27. Що називається кульовим тензором?
28. Що називається девіатором напружень?
29. Чому дорівнює перший інваріант девіатора напружень?
30. Як пов'язані питомі потенціальні енергії зміни об'єму і формозміни з напруженнями на октаедричній площадці?