Лекція №8

4.1.10. Лінійний напружений стан

За лінійного напруженого стану головні напруження можуть діяти на розтяг, коли $\sigma_1 \neq 0$ (рис. 4.22 а) або на стиск, коли $\sigma_3 \neq 0$ (рис. 4.22 б).

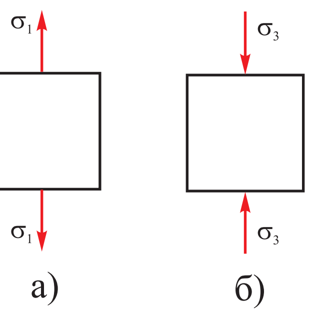


Рис. 4.22. Лінійний напружений стан: а – розтяг; б – стиск

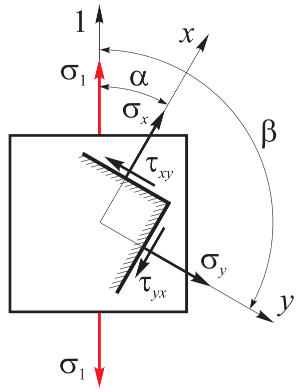


Рис. 4.23. Лінійний напружений стан: головні та неголовні площадки

Користуючись рівняннями, отриманими для плоского напруженого стану, легко обчислити напруження ну будь-якій нахиленій до головного напруження площадці. Наприклад, для схеми, представленої на рис. 4.23, з використанням рівнянь (4.43) – (4.45) отримаємо такі співвідношення:

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2 \alpha ; \qquad \sigma_y = \sigma_1 \sin^2 \alpha ; \qquad \tau_{xy} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha . \qquad (4.48)$$

Це пряма задача. Аналогічно можна розв'язати і обернену задачу.

Примітка 4.9. ***В оберненій задачі як за лінійного, так і за плоского напруженого стану напруження на неголовних площадках можуть в загальному випадки складати просторову систему, тобто діяти не в одній чи у двох, а у трьох взаємно перпендикулярних площадках. У цьому випадку відразу важко оцінити, який напружений стан насправді має місце. В будь-якому разі задачу слід розв'язувати з використанням співвідношень, отриманих для об'ємного напруженого стану. Яскравою ілюстрацією до сказаного слугує приклад 4.2 (див. лекцію 7)***

Приклад 4.7 *Знайти октаедричні нормальні та дотичні напруження в точці, де напружений стан – лінійний (рис. 4.24).*

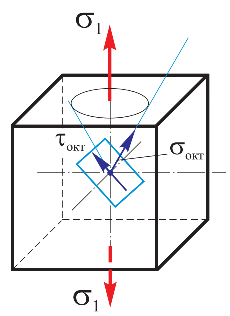


Рис. 4.24. *До прикладу* 4.7

Маємо такі напруження на октаедричні площадці:

– *октаедричні нормальні напруження*

$$\sigma_{окт} = \sigma_1/3;$$

– *октаедричні дотичні напруження*

$$\tau_{окт} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_1 .$$

Зауваження. *Якщо порівняти отримані результати з даними, наведеними у прикладі* 4.2*, то стає очевидним, що три взаємно перпендикулярні площадки, вихідні у цьому прикладі, є октаедричним площадками.*

По-перше, величини октаедричного нормального напруження і нормального напруження у вихідній площадці (приклад 4.2*) збігаються, адже* $s = \sigma_1/3$.

По-друге, октаедричне дотичне напруження є повним дотичним напруженням в октаедричній площадці. В той же час повне дотичне напруження у вихідній площадці (приклад 4.2*)* $\tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = s\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_1$. *Тобто їх величини також збігаються.*

По-третє, за лінійного напруженого стану будь-яка вісь, перпендикулярна до осі дії σ_1*, є головною, а значить будь-яка площадка, спрямовуючий косинус нормалі до якої відносно осі* 1 *дорівнює* $1/\sqrt{3}$*, є октаедричною площадкою. Ці площадки, в свою чергу, можуть бути і взаємно перпендикулярними, як у прикладі* 4.2.

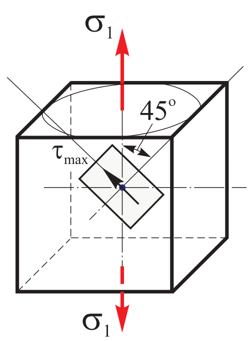


Рис. 4.25. *До прикладу* 4.8

Приклад 4.8 *Знайти найбільші дотичні напруження в точці (рис. 4.25). Порівняти їх з октаедричним дотичними напруженнями в цій точці*

Маємо такі головні напруження:

$$\sigma_1 = \sigma;\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0 .$$

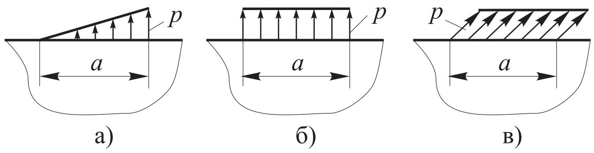
Тоді найбільші дотичні напруження, згідно з (4.42)

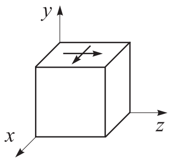
$$\tau_{max} = 0,5\sigma_1 .$$

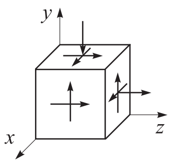
Якщо порівняти октаедричне дотичне напруження в даній точці (див. приклад 4.7*), величина якого* $\tau_{окт} = \sqrt{2}/3\sigma_1 \approx 0,471\sigma_1$*, зі знайденим максимальним дотичним напруженням, то воно складає* $\sim 0,943$ *від максимального дотичного напруження.*

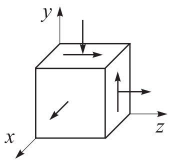
Зауваження. *Як і у випадку з октаедричним площадками, за лінійного напруженого стану будь-яка площадка в даній точці деформованого тіла, нахилена до напрямку головної осі* 1 *за розтягу або* 3 *за стиску під кутом* 45° *є площадкою дії найбільшого дотичного напруження.*

Питання для самоперевірки знань

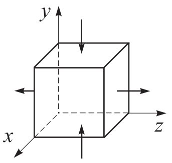
1. Що є числовою мірою внутрішнього зусилля?
2. Що називається напруженням?
3. В яких одиницях вимірюють напруження?
4. Перелічіть компоненти повного напруження на площадці.
5. Що слід розуміти під поняттям „напружений стан тіла в точці”?
6. 

Який з варіантів напружених станів на площадці a слід вважати однорідним? Тут p – повне напруження на площадці a.
7. За якої системи координат нескінченно малий об’єм вибирають у формі кулі?
8. 

Вкажіть напрямки дотичних напружень на інших гранях елемента. Позначте ці напруження у відповідності до прийнятого правила.
9. Скільки незалежних компонент напружень діє на гранях елементарного паралелепіпеда? Обгрунтуйте відповідь, пославшись на відповідні гіпотези та закони опору матеріалів.
10. Чим визначається напружений стан тіла в точці?
11. 

Позначте напруження на гранях елементарного паралелепіпеда у відповідності до прийнятого правила та запишіть їх у вигляді тензора.
12. Яке напруженням називається *повним дотичним напруженням у площадці*?
13. Які осі напруженого стану називають головними?
14. 

Які з граней елементарного паралелепіпеда, зображеного на рисунку, є головними площадками?
15. Напруження на головних площадках мають такі значення: -10 МПа; -10 МПа; -100 МПа. Позначте ці напруження, розставивши відповідним чином індекси. Покажіть, як ці напруження діють на грані елемента?
16. В чому полягає властивість екстремальності головних напружень
17. Якими мають бути головні напруження в точці деформованого тіла, щоб еліпсоїд напружень був поверхнею обертання?
18. За яких умов в точці деформованого тіла виникає всебічний рівномірний розтяг? Який вид напруженого стану має місце в цих умовах?
19. Чим відрізняється лінійний напружений стан тіла в точці від об’ємного?
20. Відносно якої осі слід повернути елемент (див. п. 14), щоб усі його грані стали головними площадками?
21. Чому коефіцієнти $I_{\sigma 1}$, $I_{\sigma 2}$, $I_{\sigma 3}$ в кубічному рівнянні для оберненої задачі напруженого стану називають *інваріантами*?

22. 

Позначте напруження та вкажіть вид напруженого стану, в якому знаходиться елемент. Запишіть вирази для інваріантів напруженого стану для цього випадку.

23. В точці деформованого тіла діють головні напруження 100 МПа, 60 МПа і 10 МПа. Знайти нормальне і повне напруження на площадці, спрямовуючі косинуси нормалі до якої з осями 1 і 2 відповідно $1/\sqrt{3}$ і 0,5.
24. Чому дорівнює октаедричне дотичне напруження в умовах всебічного рівномірного розтягу?
25. Чому дорівнює октаедричне нормальне напруження в умовах всебічного рівномірного стиску?
26. Чому дорівнюють максимальні дотичні напруження у випадку напруженого стану, наведеного в п. 22?
27. Головні напруження в точці відповідно дорівнюють: 50 МПа, 50 МПа і 0. В якій площадці діє максимальне дотичне напруження і яка його величина?
28. Коли дотичне напруження у площадці в задачах плоского напруженого стану вважається додатним?
29. Сформулюйте порядок визначення напрямку головних напружень у оберненій задачі плоского напруженого стану.
30. Чи можуть в умовах лінійного напруженого стану діяти напруження одночасно у кожній з трьох взаємно перпендикулярних площадок?

Тема 4.2. Деформації

4.2.1. Поняття про переміщення та деформацію

Деформацією називають зміну розмірів і форми тіла під дією навантажень.

Як уже відзначалось, при навантажуванні тіло деформується, і його точки змінюють взаємне розташування. Іншими словами, точки тіла переміщуються відносно деякої системи координат *XYZ* (рис. 4.26). Точка *A*, переміщуючись вздовж деякої траєкторії, займе кінцеве положення A_1. Її повне переміщення характеризується вектором $\vec{\Delta}$.

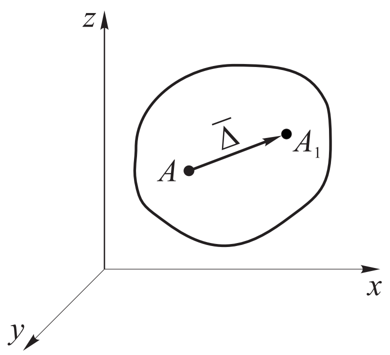


Рис. 4.26. Вектор переміщення точки *A*

В загальному випадку переміщення різних точок тіла будуть різними. Тобто вектор переміщення $\vec{\Delta}$ є функцією координат точки:

$$\vec{\Delta} = \vec{\Delta}(x, y, z).$$

Проекції вектора $\vec{\Delta}$ на осі *x*, *y* і *z* позначають відповідно *u*, *v* і *w*. Називають їх *компонентами переміщень* або просто *переміщеннями* точки.

Проте переміщення не може служити однозначною характеристикою деформації, оскільки його причиною можуть бути не лише деформації тіла в даній точці, але й жорсткі зміщення її, пов'язані з деформаціями інших частин цього тіла.

Щоб охарактеризувати деформацію в даній точці тіла, розглянемо, як змінюються розміри і положення деякого елементарного відрізка AB (рис. 4.27).

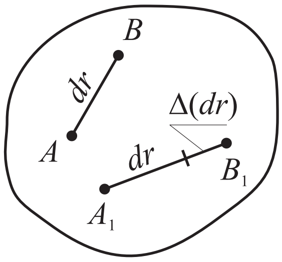


Рис. 4.27. Лінійна деформація відрізка

Його довжина в недеформованому стані dr. Після деформації тіла точки A і B зайняли положення A_1 і B_1. При цьому довжина відрізка змінилася на величину $\Delta(dr)$, яку називають *абсолютною деформацією* відрізка AB.

Лінійною деформацією тіла в точці у заданому напрямку r називають відношення абсолютної деформації відрізка dr до його початкової довжини:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta(dr)}{dr} \qquad (4.49)$$

Цю величину також називають *відносною зміною довжини відрізка* dr.

Щодо зміни положення даного відрізка, то, як видно з рис. 4.27, він змістився як жорстке ціле та повернувся на деякий кут відносно початкового свого напрямку. У загальному випадку відрізки, що проходять через дану точку у різних напрямках, матимуть різні кути повороту. Значить зміна попередньо однакових кутів між двома різними парами відрізків в даній точці буде різною. Щоб охарактеризувати ці зміни, вводять поняття *кутової деформації*.

Розглянемо два взаємно перпендикулярних відрізки dr_1 і dr_2, що проходять через точку A (рис. 4.28).

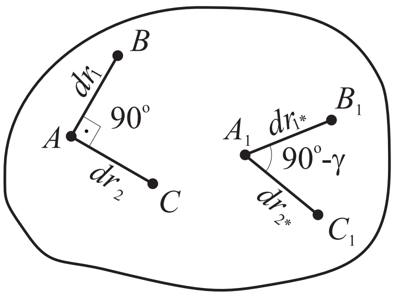


Рис. 4.28. Кутова деформація тіла в точці

Внаслідок повороту відрізків відносно точки A після деформації попередньо прямий кут BAC змінився на величину γ.

Зміну прямого кута між взаємно перпендикулярними до деформації напрямками називають зсувом або відносним зсувом.

Згідно з рис. 4.28 відрізки dr_1 і dr_2 після деформації зайняли положення dr_{1*} і dr_{2*}. Отже відносний зсув між їх напрямками

$$\gamma_{r1r2} = \frac{\pi}{2} - \angle B_1 A_1 C_1 \qquad (4.50)$$

Примітка 4.10. ***Лінійна деформація*** ε_r ***вважається додатною, якщо має місце видовження відрізка. В разі його вкорочення маємо від'ємну деформацію.***

Примітка 4.11. ***Відносний зсув вважається додатним, якщо попередньо прямий кут зменшується. В разі його збільшення маємо від'ємний зсув.***

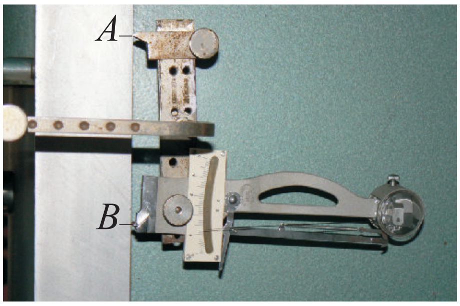


Рис. 4.29. Механічний тензометр
(До прикладу 4.10*)*

Приклад 4.9 *Прямолінійний стержень перебуває в умовах розтягу. На бічній поверхні паралельно його осі встановили механічний тензометр (рис. 4.29) з базою вимірювань* $l_б = 100$ *мм та ціною поділки шкали* $k = 0{,}001$ *мм. Після навантаження конструкції показання тензометра склали 12 поділок шкали. Визначити величину відносної лінійної деформації відрізка AB, в точках A і B якого опираються вістря ніжок тензометра.*

Маючи показання тензометра, знайдемо абсолютну деформацію відрізка AB на бічній поверхні стержня, довжина якого відповідає базі вимірювань тензометра:

$$\Delta l_{AB} = kn = \frac{1}{1000} \cdot 12 = 0{,}012 \text{ мм}.$$

Тоді відносна лінійна деформація в напрямку відрізка AB

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\Delta l_{AB}}{l_б} = \frac{0{,}012}{100} = 1{,}2 \cdot 10^{-5}.$$

Примітка 4.12. ***В загальному випадку знайдена відносна лінійна деформація*** ε_{AB} ***може вважатися насправді деякою середньою лінійною деформацією відрізка AB, оскільки в межах його довжини деформація може розподілятись нерівномірно. Скажімо, ми вибрали дві пари точок, розташованих в різних частинах відрізка. Відстані між точками для кожної пари однакові. Якщо зміна відстані між точками відрізнятиметься, то й відносна лінійна деформація в цих зонах відрізка буде різною. У цьому випадку говорять про нерівномірну або неоднорідну деформацію відрізка. Якщо ж лінійна деформація буде величиною сталою, то матимемо рівномірну або однорідну деформацію. У цьому випадку знайдена деформація*** ε_{AB} ***є лінійною деформацією в будь-якій точці відрізка AB у його напрямку.***

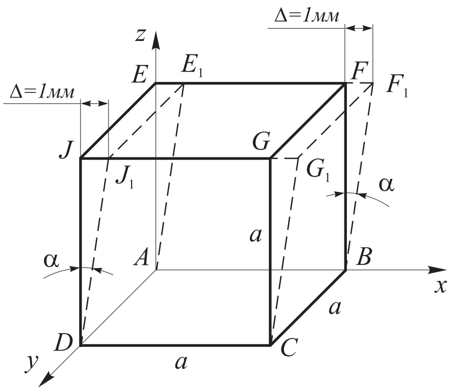


Рис. 4.30. *До прикладу* 4.30

Приклад 4.10 *Елемент конструкції у формі куба з довжиною ребра $a = 25$ мм при навантажуванні деформується так, що довжини ребер не змінюються. Проте верхня грань його відносно нижньої зміщується на 1 мм у напрямку осі X (рис.* 4.30*). Необхідно визначити відносні лінійні деформації елемента в напрямку осей X, Y, Z та зсуви між ними, вважаючи їх рівномірно розподіленими в межах усього об'єму.*

Оскільки за умовою задачі довжини ребер куба при навантажуванні залишаються незмінними, то лінійні деформації в їх напрямку (тобто в напрямку осей X, Y, Z) дорівнюють нулю.

Зміна попередньо прямого кута між осями X і Z, викликана зміщенням верхньої грані відносно нижньої, вказує на те, що в цій площині присутня деформація зсуву:

$$\gamma_{xz} = \frac{\pi}{2} - \angle JDJ_1 = \alpha .$$

За умови рівномірності деформації очевидним є те, що ребра куба залишатимуться прямими. Знаходимо

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{JJ_1}{JD} = \frac{\Delta}{a} = \frac{1}{25} = 0,04 .$$

Тоді $\alpha \approx 0,04$ *рад*.

Згідно з умовою задачі зсувів між віссю Y та осями X і Z немає, тобто прямі кути між ними залишаються незмінними.

Отже, $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = 0$*;* $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0$*;* $\gamma_{zx} = 0,04$.

4.2.2. Взаємозв'язок між переміщеннями і деформаціями (рівняння Коші)

Важливою задачею є встановлення зв'язку між відносними деформаціями тіла в точці та відомими компонентами її переміщень.

Зауваження 1. *Слід відзначити, що переміщення точок можуть бути знайдені, наприклад, емпіричним шляхом. Скажімо, розтягаючи прямий стержень, ми легко знайдемо переміщення будь-якої точки на його поверхні відносно попередньо вибраної точки відліку простим вимірюванням. А значить можемо встановити і функціональні залежності між переміщеннями цих точок та їх положеннями у заданій системі координат.*

Виріжмо з деформованого тіла елементарний паралелепіпед з довжиною ребер dx, dy, dz. Після деформації тіла цей об'єм змінюється як за величиною, так і за формою. На рис. 4.31 а зображений паралелепіпед до деформації ($ABCDEFGJ$) і після деформації ($A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1J_1$) без зміни форми, тобто без зміни прямих кутів між його ребрам.

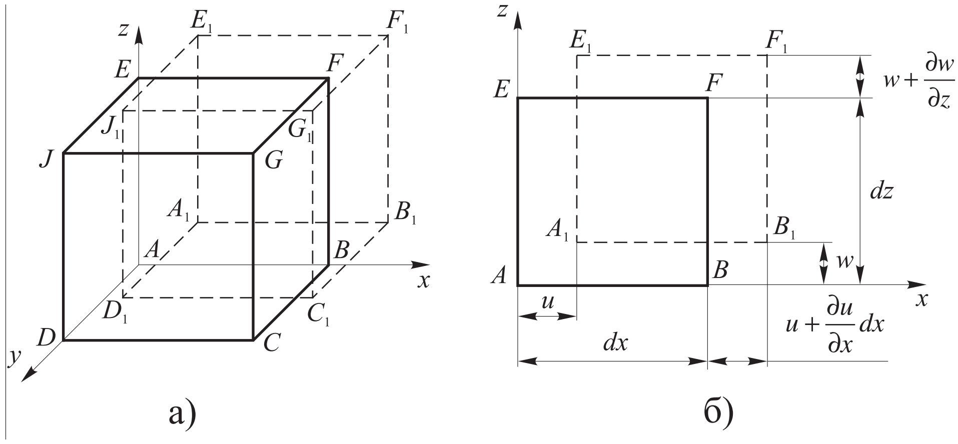


Рис. 4.31. Переміщення граней елементарного паралелепіпеда: а – у просторі; б – у проекції на координатну площину *x-z*

На рис. 4.31 б приведена проекція грані $ABFE$ на координатну площину XAZ ($A_1B_1F_1E_1$ – положення грані після деформації). Точка A вздовж осі x отримала переміщення u, а вздовж осі z – w. Переміщення точки F вздовж цих осей відповідно дорівнюють $u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$ та $w+\frac{\partial w}{\partial z}dz$. Очевидно, що абсолютна деформація цієї грані вздовж осі x (приріст її довжини) складає $\Delta\left(dx\right)=\frac{\partial u}{\partial x}dx$, а вздовж осі z – $\Delta\left(dz\right)=\frac{\partial w}{\partial z}dz$. Тоді відносна лінійна деформація ребра AB вздовж осі x, згідно з (4.49), дорівнює відношенню

$$\varepsilon_x=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}dx}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Для двох інших осей отримаємо: $\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}$ і $\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}$.

Розглянемо кутові деформації елемента. На рис. 4.32 показана зміна попередньо прямих кутів грані $ABFE$. Відносний зсув між осями x і z, згідно з (4.50),

$$\gamma_{xz}=\frac{\pi}{2}-\angle B_1AE_1=\angle BAB_1+\angle EAE_1\cdot$$

Оскільки кути дуже малі, то їх можна замінити тангенсами:

$$\angle BAB_1\approx\frac{BB_1}{BA}=\frac{\frac{\partial w}{\partial x}dx}{dx}=\frac{\partial w}{\partial x};$$

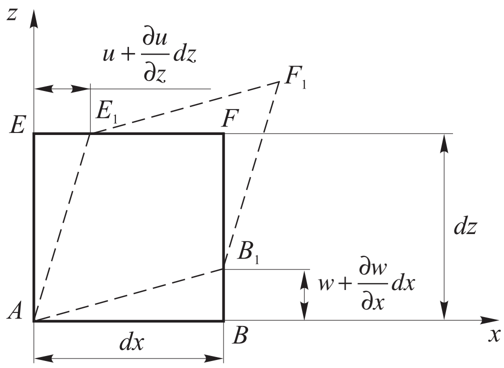


Рис. 4.32. Кутова деформація грані елементарного паралелепіпеда

$$\angle EAE_1 \approx \frac{EE_1}{EA} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}dz}{dz} = \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Таким чином кутова деформація у площині XAZ

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Аналогічно можна показати, що $\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ і $\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$.

Запишемо вирази для шести компонент відносних лінійних та кутових деформацій:

$$\boxed{\begin{gathered}\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x};\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y};\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};\\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y};\ \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z};\ \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.\end{gathered}} \tag{4.51}$$

Отримані співвідношення називаються *рівняннями Коші*.

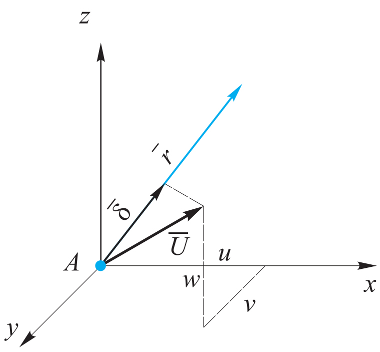
4.2.3. Деформований стан тіла в точці. Тензор деформацій

По аналогії з напруженим станом можна дати таке означення деформованого стану.

Сукупність деформацій для множини напрямків, що проходять через дану точку, утворює деформований стан тіла в точці.

Покажемо, що шість компонент деформацій ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx} для трьох довільно вибраних взаємно перпендикулярних напрямків x, y, z, що проходять через дану точку, повністю визначають деформований стан в цій точці. Іншими словами, покажемо, що, знаючи ці шість незалежних компонент деформацій, можемо знайти лінійну деформацію в даній точці у будь-якому напрямку, а також відносний зсув між будь-якими двома взаємно перпендикулярними напрямками.

Отже, знайдемо лінійну деформацію в деякому напрямку $\vec{r}$ (рис. 4.33 а). Тут $\vec{U}$ – вектор переміщення точки A; u, v, w – його проекції на осі x, y, z.



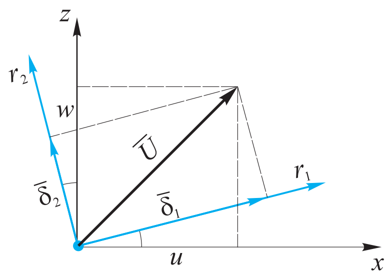


Рис. 4.33. До визначення деформацій в точці *A*:
а – лінійної деформації у напрямку $\vec{r}$;
б – відносного зсуву між напрямками $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$

Позначимо через $\vec{\delta}$ проекцію вектора переміщення $\vec{U}$ на напрямок $\vec{r}$. Можемо записати, що

$$\delta = ul + vm + wn\,.$$

Тут l, m і n – спрямовуючі косинуси напрямку $\vec{r}$ відносно осей x, y, z відповідно.

Тоді лінійна деформація в напрямку $\vec{r}$, згідно з рівняннями Коші (4.51)

$$\varepsilon_r = \frac{\partial\delta}{\partial r}.$$

Застосовуючи формулу диференціювання складних функцій, для нашого випадку отримаємо

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dr} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{dr} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{dz}{dr} = \frac{\partial}{\partial x}l + \frac{\partial}{\partial y}m + \frac{\partial}{\partial z}n\,.$$

Тоді

$$\varepsilon_r = \frac{\partial}{\partial r}\left(ul + vm + wn\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}l + \frac{\partial u}{\partial y}m + \frac{\partial u}{\partial z}n\right)l + \left(\frac{\partial v}{\partial x}l + \frac{\partial v}{\partial y}m + \frac{\partial v}{\partial z}n\right)m +$$
$$+\left(\frac{\partial w}{\partial x}l + \frac{\partial w}{\partial y}m + \frac{\partial w}{\partial z}n\right)n = \frac{\partial u}{\partial x}l^2 + \frac{\partial v}{\partial y}m^2 + \frac{\partial w}{\partial z}n^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)lm +$$
$$+\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right)mn + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)nl.$$

В результаті отримаємо:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{zx} nl. \tag{4.52}$$

Тим же чином знайдемо відносний зсув між взаємно перпендикулярними напрямками $\vec{r}_1$ і $\vec{r}_2$ (рис. 4.33 б). Позначимо проекції вектора переміщення $\vec{U}$ на вказані напрямки через $\delta_1 = ul_1 + vm_1 + wn_1$ і $\delta_2 = ul_2 + vm_2 + wn_2$. Тут l_1, m_1, n_1 – спрямовуючі косинуси напрямку $\vec{r}_1$; l_2, m_2, n_2 – спрямовуючі косинуси напрямку $\vec{r}_2$.Відносний зсув між цими напрямками, згідно з рівняннями Коші,

$$\gamma_{r_1 r_2} = \frac{\partial \delta_1}{\partial r_2} + \frac{\partial \delta_2}{\partial r_1}.$$

Після нескладних перетворень отримаємо:

$$\begin{aligned} \gamma_{r_1 r_2} = 2\varepsilon_x l_1 l_2 + 2\varepsilon_y m_1 m_2 + 2\varepsilon_z n_1 n_2 + \gamma_{xy}\left(l_1 m_2 + l_2 m_1\right) + \\ + \gamma_{yz}\left(m_1 n_2 + m_2 n_1\right) + \gamma_{zx}\left(\mathrm{n}_1 l_2 + n_2 l_1\right). \end{aligned} \tag{4.53}$$

Слід зазначити, що деформований стан тіла в точці має ті ж властивості, що й напружений стан.

Так, серед множини напрямків, що проходять через дану точку, можна вказати три взаємно перпендикулярні осі, в системі яких кутові деформації відсутні.

Три взаємно перпендикулярні осі, що проходять через дану точку, в системі яких відсутні відносні зсуви, називаються головними осями деформованого стану, а лінійні деформації, що в їх напрямках виникають, називаються головними деформаціями.

Головні деформації позначають, за аналогією з головними напруженнями, ε_1, ε_2, ε_3. Знаходять їх з кубічного рівняння

$$\varepsilon^3 - I_{\varepsilon 1}\varepsilon^2 + I_{\varepsilon 2}\varepsilon - I_{\varepsilon 3} = 0, \tag{4.54}$$

коефіцієнтами якого є *інваріанти деформованого стану*:

$$I_{\varepsilon 1} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \tag{4.55}$$

$$I_{\varepsilon 2} = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4}\gamma_{xy} - \frac{1}{4}\gamma_{yz} - \frac{1}{4}\gamma_{zx}; \tag{4.56}$$

$$I_{\varepsilon 3} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \qquad (4.57)$$

Порівнюючи вирази (4.57) і (4.27), відзначаємо, що структурно вони аналогічні: аналогом нормальних напружень у виразі (4.27) є лінійна деформація у виразі (4.57), а аналогом дотичних напружень є половина кута зсуву у відповідній площині.

Оскільки третій інваріант напруженого стану є тензором напружень T_σ, то третій інваріант деформованого стану є *тензором деформацій* T_ε. Через головні деформації він запишеться у вигляді

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix}. \qquad (4.58)$$

Формула для визначення лінійної деформації в довільному напрямку, (4.52), через головні деформації набуде виду:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_1 l^2 + \varepsilon_2 m^2 + \varepsilon_3 n^2, \qquad (4.59)$$

а формула (4.53) для визначення зсуву між двома взаємно перпендикулярними напрямками –

$$\gamma_{r_1 r_2} = 2\varepsilon_1 l_1 l_2 + 2\varepsilon_2 m_1 m_2 + 2\varepsilon_3 n_1 n_2. \qquad (4.60)$$

4.2.4. Об’ємна деформація

Крім лінійної та кутової деформацій в механіці деформованого твердого тіла потрібно визначати також *об’ємну деформацію*, тобто відносну зміну об’єму в точці.

Якщо елементарний паралелепіпед до деформації мав об’єм $dxdydz$ (рис. 4.31), то після деформації його об’єм стане

$$dV = \left(dx + \frac{\partial u}{\delta x}dx\right)\left(dy + \frac{\partial v}{\delta y}dy\right)\left(dz + \frac{\partial w}{\delta z}dz\right) = dxdydz\left(1 + \frac{\partial u}{\delta x}\right)\left(1 + \frac{\partial v}{\delta y}\right)\left(1 + \frac{\partial w}{\delta z}\right).$$

Згідно з рівняннями Коші (4.51) запишемо

$$dV = dV_0\left(1+\varepsilon_x\right)\left(1+\varepsilon_y\right)\left(1+\varepsilon_z\right) =$$
$$= dV_0\left(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z+\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_z\varepsilon_x+\varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z\right).$$

Нехтуючи в цьому виразі добутками деформацій як величинами вищого порядку малості, отримаємо

$$dV = dV_0\left(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right).$$

Об'ємною деформацією тіла в точці називається відношення приросту об'єму елемента внаслідок деформації до початкового його об'єму.

Отже

$$\varepsilon_V = \frac{dV - dV_0}{dV_0} = \frac{dV_0\left(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z\right) - dV_0}{dV_0};$$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3. \qquad (4.61)$$

Тобто об'ємна деформація дорівнює сумі лінійних деформацій в точці. Іншими словами, вона є першим інваріантом тензора деформацій.

Приклад 4.11 *Паралелепіпед з розмірами $20\times30\times40$ мм навантажується, в результаті чого відносні лінійні деформації у напрямку його ребер складають відповідно $\varepsilon_x = 0{,}06$; $\varepsilon_y = -0{,}02$; $\varepsilon_z = 0{,}03$. Визначити, який об'єм матиме паралелепіпед після деформування.*

Відносну об'ємну деформацію паралелепіпеда знайдемо за формулою (4.61):

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = 0{,}06-0{,}02+0{,}03 = 0{,}07.$$

Оскільки $\varepsilon_V = \left(V-V_0\right)/V_0$, де V – набутий в результаті деформації об'єм паралелепіпеда, а V_0 – початковий його об'єм, то звідси $V = V_0\left(1+\varepsilon_V\right)$.

Початковий об'єм паралелепіпеда $V_0 = 20\cdot30\cdot40 = 24\cdot10^3$ мм^3. Тоді

$$V = 24\cdot10^3\left(1+0{,}07\right) = 25{,}68\cdot10^3 \text{ мм}^3.$$