Лекція №7

З практичної точки зору важливо вміти встановлювати взаємозалежності між компонентами напружень у головних і неголовних площадках в даній точці деформованого тіла.

Подібна задача, як правило, формулюється у двох варіантах:

– за відомим напруженнями в неголовних площадках необхідно знайти величину і напрямок головних напружень в даній точці (*обернена задача напруженого стану*);
– за відомими головними напруженнями знайти величину і напрямок нормальних і дотичних напружень в неголовних площадках, орієнтація яких відносно головних осей задана спрямовуючими косинусами нормалей (*пряма задача напруженого стану*).

Розглянемо ці задачі для об’ємного напруженого стану.

4.1.5. Визначення величини і напрямку головних напружень

Для розв’язання оберненої задачі напруженого стану припустимо, що грань *BCD* елементарного тетраедра – головна площадка (рис. 4.12). Нормальне напруження в ній (воно ж повне напруження) – це головне напруження, спрямоване вздовж нормалі ν. Позначимо його через σ.

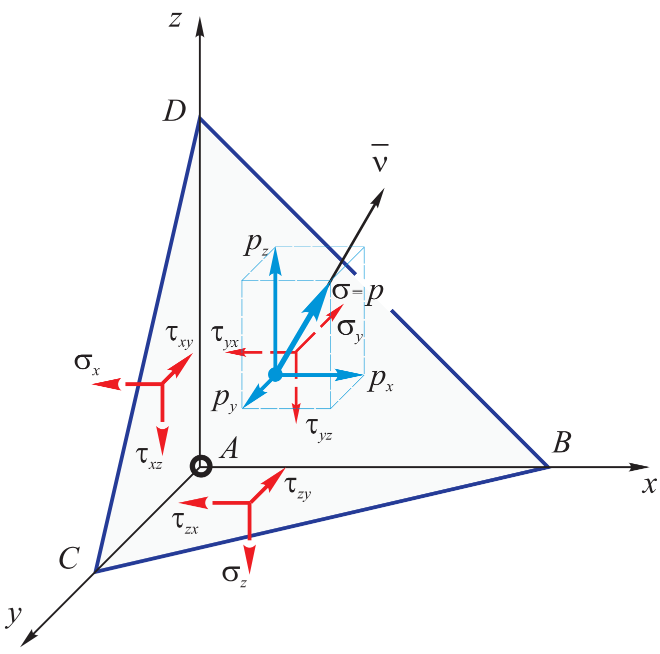


Рис. 4.12 Грань елементарного тетраедра як головна площадка

Враховуючи, що

$$p_x = \sigma l; \qquad p_y = \sigma m; \qquad p_z = \sigma n, \tag{4.20}$$

рівняння рівноваги тетраедра (4.7) набувають вигляду:

$$\begin{cases} \sigma l = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \\ \sigma m = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ \sigma n = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{cases} \tag{4.21}$$

або

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma) l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n = 0 \\ \tau_{xy} l + (\sigma_y - \sigma) m + \tau_{zy} n = 0. \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + (\sigma_z - \sigma) n = 0 \end{cases} \tag{4.22}$$

Розглядаючи отримані рівняння як систему однорідних рівнянь відносно спрямовуючих косинусів l, m, n нормалі ν, робимо висновок, що вона має ненульовий розв'язок, адже виконується умова $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Тобто головний визначник цієї системи дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} (\sigma_x - \sigma) & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & (\sigma_y - \sigma) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & (\sigma_z - \sigma) \end{vmatrix} = 0 \tag{4.23}$$

Розгорнемо визначник та, згрупувавши члени, що містять σ з однаковим степенем, запишемо таке кубічне рівняння:

$$\sigma^3 - I_{\sigma 1}\sigma^2 + I_{\sigma 2}\sigma - I_{\sigma 3} = 0. \tag{4.24}$$

Тут

$$I_{\sigma 1} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \tag{4.25}$$

$$I_{\sigma 2} = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2; \tag{4.26}$$

$$I_{\sigma 3} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}. \tag{4.27}$$

Три матеріальні корні кубічного рівняння (4.24) дають три значення головних напружень σ_1, σ_2, σ_3.

Напрямки головних осей легко знайти, підставляючи в рівняння системи (4.22) почергово замість σ значення головних напружень та розв'язуючи їх відносно спрямовуючих косинусів нормалей до відповідних головних площадок.

Оскільки головні напруження визначаються характером напруженого стану тіла в точці і не залежать від вибору системи координат X, Y, Z, значить і коефіцієнти в рівнянні (4.24) не залежать від вибору системи координат. Іншими словами, вони залишаються інваріантними при повороті координатних осей. Тому їх називають *інваріантами напруженого стану* або *інваріантами тензора напружень*.

Якщо в якості вихідних були вибрані головні осі 1, 2 і 3, то інваріанти запишуться через головні напруження:

$$I_{\sigma 1} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 ; \tag{4.28}$$

$$I_{\sigma 2} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 ; \tag{4.29}$$

$$I_{\sigma 3} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 . \tag{4.30}$$

Очевидно, що в умовах плоского напруженого стану, коли одне з головних напружень відсутнє, третій інваріант $I_{\sigma 3} = 0$. А в умовах лінійного напруженого стану, коли відсутні одразу два головних напруження, дорівнюватимуть нулю другий і третій інваріанти. Тобто $I_{\sigma 2} = I_{\sigma 3} = 0$.

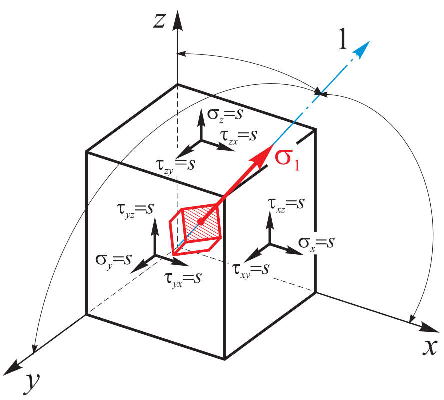


Рис. 4.13 *До прикладу 4.2*

Приклад 4.2 *Визначити величину і напрямок головних напружень та встановити вид напруженого стану в точці, коли на трьох взаємно перпендикулярних площадках, що через неї проходять, всі компоненти напружень однакові за величиною (рис. 4.13).*

За умовою $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = s$. *Тоді інваріанти напруженого стану, згідно з (4.25) – (4.27),* $I_{\sigma 1} = 3s$; $I_{\sigma 2} = I_{\sigma 3} = 0$. *Підставляючи ці значення в рівняння (4.24), отримаємо*

$$\sigma^3 - I_{\sigma 1}\sigma^2 + I_{\sigma 2}\sigma - I_{\sigma 3} = \sigma^3 - I_{\sigma 1}\sigma^2 = 0 .$$

Звідси корні рівняння, вони ж головні напруження $\sigma_1 = I_{\sigma 1} = 3s$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

Таким чином напружений стан в точці лінійний.

Щоб знайти напрямок головного напруження відносно заданих осей (нормалей до вихідних площадок), підставимо в рівняння системи (4.22) значення відповідних напружень.

$$\begin{cases} -2sl + sm + sn = 0 \\ sl - 2sm + sn = 0 \\ sl + sm - 2sn = 0 \end{cases}.$$

Звідси отримаємо $l = m = n$. *Отже вісь 1 (нормаль до площадки дії* σ_1*) рівнонахилена до вихідних площадок. З урахуванням умови* $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, *маємо* $l = m = n = 1/\sqrt{3}$.

4.1.6. Визначення напружень на неголовних площадках

В прямій задачі напруженого стану три взаємно перпендикулярні площадки є головними площадками. Скориставшись формулою (4.13), ми отримаємо вирази для нормального напруження на площадці, орієнтація якої відносно головних осей задана спрямовуючими косинусами l, m, n нормалі ν (див. рис. 4.9):

$$\sigma_\nu = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2. \tag{4.31}$$

Дотичне напруження в цій площадці в деякому напрямку μ, згідно з (4.14):

$$\tau_{\nu\mu} = \sigma_1 l l' + \sigma_2 m m' + \sigma_3 n n'. \tag{4.32}$$

Повне напруження, згідно з (4.8), з урахуванням (4.17):

$$p = \sqrt{\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2}. \tag{4.33}$$

Отже, аналіз напруженого стану в точці деформованого тіла дозволив нам виявити три взаємно перпендикулярні площадки, названі головними площадками, які мають такі надважливі особливості: в них відсутні дотичні напруження, а нормальні напруження, названі головними напруженнями, володіють властивостями екстремальності (див. п. 4.1.4).

Проте в точці деформованого тіла є ще деякі площадки, які становлять значний практичний інтерес. Це, зокрема, *октаедричні площадки* та *площадки дії максимальних повних дотичних напружень*. З визначенням їх положення та напруженнями в них ми познайомимось у наступних параграфах.

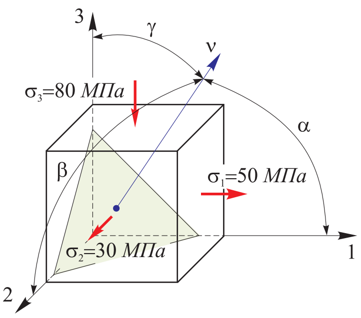


Рис. 4.14 *До прикладу 4.3*

Приклад 4.3 *Визначити повне, нормальне та повне дотичне напруження на площадці (рис. 4.14), нормаль* ν *до якої складає з осями 1, 2 і 3 кути* $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$ *і* $\gamma = 60°$ *відповідно.*

Спрямовуючі косинуси нормалі ν $l = \cos\alpha = \cos 60° = 0{,}5$; $m = \cos\beta = \cos 45° = 1/\sqrt{2}$; $n = \cos\gamma = \cos 60° = 0{,}5$.

Повне напруження на похилій площадці знайдемо за формулою (4.33):

$$p = \sqrt{\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2} = \sqrt{2500 \cdot 0,25 + 900 \cdot 0,5 + 6400 \cdot 0,25} = 51,72 \ МПа.$$

Нормальне напруження, згідно з формулою (4.31), з урахуванням знаків головних напружень

$$\sigma_\nu = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 = 50 \cdot 0,25 + 30 \cdot 0,5 - 80 \cdot 0,25 = 7,5 \ МПа.$$

Величину повного дотичного напруження обчислимо за формулою (4.12):

$$\tau_\nu = \sqrt{p^2 - \sigma_\nu^2} = \sqrt{51,72^2 - 7,5^2} = 51,17 \ МПа.$$

4.1.7. Октаедричні площадки та октаедричні напруження

Октаедричною називається площадка, нормаль до якої рівнонахилена до головних осей.

Назву свою ця площадка отримала від октаедра – восьмигранника, який можна отримати з елементарного паралелепіпеда (рис. 4.15). У кожному з восьми квадрантів системи координатних осей 1,2,3 (головних осей напруженого стану) можна провести рівнонахилену площадку. Їх сукупність утворює октаедр.

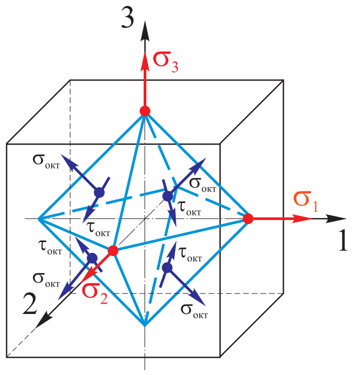


Рис. 4.15 Октаедричні площадки

Для октаедричної площадки справедлива умова:

$$l = m = n.$$

Враховуючи, що $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, отримаємо:

$$l^2 = m^2 = n^2 = \frac{1}{3}.$$

Тоді за формулою (4.31) отримаємо вираз для нормального напруження в октаедричні площадці:

$$\sigma_{окт} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}. \tag{4.34}$$

Повне дотичне напруження в октаедричні площадці знайдемо за формулою (4.12) з урахуванням (4.33) та (4.34):

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \tag{4.35}$$

Це дотичне напруження називають *октаедричним*.

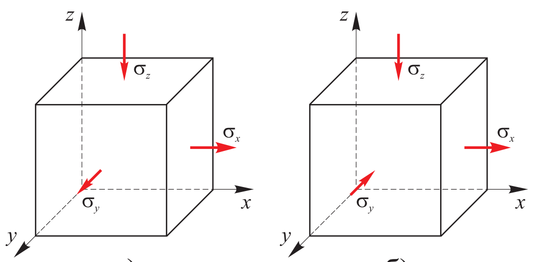
Як бачимо, октаедричні нормальне напруження $\sigma_{\text{окт}}$ дорівнює усередненій величині головних напружень в даній точці – так званому *середньому напруженню* σ_0.

Октаедричне дотичне напруження $\tau_{\text{окт}}$ пов’язане з інтенсивністю напружень σ_i – розрахунковою величиною, якою користуються при розв’язанні задач теорії пластичності:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}\,. \tag{4.36}$$

Отже

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_{\text{окт}}\,. \tag{4.37}$$



а) б)

Рис. 4.16 *До прикладу 4.4:*
а –варіант 1;
б – варіант 2

Приклад 4.4 *Знайти октаедричні нормальні та дотичні напруження в точці, коли на гранях елементарного паралелепіпеда (рис. 4.16 а) діють нормальні напруження* $|\sigma_x| = 40$ МПа, $|\sigma_y| = 30$ МПа, $|\sigma_z| = 20$ МПа. *Як зміняться октаедричні напруження коли змінити напрямок дії σ_y на протилежний (рис. 4.16 б)?*

Оскільки на гранях елементарного паралелепіпеда не діють дотичні напруження, то вони є головними площадками. Згідно з правилом розстановки індексів при головних напруженнях для першого варіанту напруженого стану (рис. 4.16 а) маємо $\sigma_1 = \sigma_x = 40$ *МПа*; $\sigma_2 = \sigma_y = 30$ *МПа*; $\sigma_3 = \sigma_z = -20$ *МПа*.

Октаедричні нормальні напруження, згідно з (4.34),

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3} = \frac{40+30-20}{3} = 16{,}67\ \textit{МПа}.$$

Октаедричне дотичне напруження, згідно з (4.35),

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{(40-30)^2+(30+20)^2+(-20-40)^2} =$$
$$= 26{,}25\ \textit{МПа}.$$

Якщо змінити напрямок напруження σ_y на протилежний (див. рис. 4.16 б), то матимемо такі головні напруження: $\sigma_1 = \sigma_x = 40$ *МПа*; $\sigma_2 = \sigma_z = -20$ *МПа*; $\sigma_3 = \sigma_y = -30$ *МПа*. *Отримаємо такі значення октаедричним напружень:*

$$\sigma_{окт} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{40 - 20 - 30}{3} = -3,33 \ МПа \ ;$$

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3}\sqrt{(40+20)^2 + (-20+30)^2 + (-30-40)^2} = 30,91 \ МПа.$$

Як бачимо, октаедричні напруження змінили свою величину, а нормальне октаедричне нормальне напруження змінило також напрямок – стало стисним.

4.1.8. Найбільші дотичні напруження

Визначимо величину найбільшого дотичного напруження в точці деформованого тіла та положення площадки в якій воно діє. Звісно, мова йде про повне дотичне напруження у площадці.

Запишемо, згідно з (4.12)

$$\tau_\nu^2 = p^2 - \sigma_\nu^2 .$$

Тут τ_ν – повне дотичне напруження на площадці з нормаллю ν; p, σ_ν – відповідно повне та нормальне напруження в цій площадці.

Якщо вихідні осі головні, то, з урахуванням (4.31) і (4.33), отримаємо

$$\tau_\nu^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - \left(\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2\right)^2 .$$

Скориставшись умовою (4.18), виразимо один зі спрямовуючих косинусів, наприклад n, через два інших: $n^2 = 1 - l^2 - m^2$. Тоді

$$\begin{aligned}\tau_\nu^2 &= \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2\left(1 - l^2 - m^2\right) - \left[\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3\left(1 - l^2 - m^2\right)\right]^2 = \\ &= \sigma_3^2 + \left(\sigma_1^2 - \sigma_3^2\right) l^2 + \left(\sigma_2^2 - \sigma_3^2\right) m^2 - \left[\sigma_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2\right]^2\end{aligned} . \quad (4.38)$$

Позначимо кути нахилу нормалі ν відносно осі 1 через α, а відносно осі 2 – через β. Тоді спрямовуючі косинуси запишуться як $l = \cos\alpha$ і $m = \cos\beta$. Згідно з правилом визначення екстремуму функції, диференціюємо вираз (4.38) по кутах α і β і прирівнюємо похідні до нуля:

$$-2l^2\sqrt{1 - l^2}\left\{\sigma_1^2 - \sigma_3^2 - 2\left[\sigma_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2\right](\sigma_1 - \sigma_3)\right\} = 0 ; \quad (4.39)$$

$$-2m^2\sqrt{1 - m^2}\left\{\sigma_2^2 - \sigma_3^2 - 2\left[\sigma_3 + (\sigma_1 - \sigma_3) l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3) m^2\right](\sigma_2 - \sigma_3)\right\} = 0 . \quad (4.40)$$

Проаналізуємо умови виконання отриманих рівностей. Таких умов може бути три.

1. $l = m = 0$. Проте в цьому випадку $n = \pm 1$. Тобто нормаль ν збігається з віссю 3, а площадка відповідно є головною площадкою, де дотичне напруження відсутнє. Тобто маємо умову мінімуму повного дотичного напруження $\tau_\nu = 0$.

2. Виконання другої умови $l^2 = m^2 = 1$ неможливе, адже в цьому випадку $n^2 = -1$, тобто цей спрямовуючий косинус буде числом ірраціональним.

3. Третю умову проаналізуємо, перетворивши вирази у фігурних дужках до виду

$$\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)\left\{\sigma_1 + \sigma_3 - 2\left[\sigma_3 + \left(\sigma_1 - \sigma_3\right)l^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)m^2\right]\right\} = 0;$$

$$\left(\sigma_2 - \sigma_3\right)\left\{\sigma_2 + \sigma_3 - 2\left[\sigma_3 + \left(\sigma_1 - \sigma_3\right)l^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)m^2\right]\right\} = 0.$$

Виконання умов рівності нулю отриманих виразів можливе, коли $\sigma_1 = \sigma_3$ і $\sigma_2 = \sigma_3$. Але це означає, що $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, тобто маємо випадок всебічного рівномірного розтягу або стиску, коли всі площадки, що проходять через точку є головним (див. п. 4.1.4). Значить дотичні напруження в будь-якій площадці дорівнюватимуть нулю.

Ще однією умовою рівності нулю отриманих виразів є рівність нулю виразів у фігурних дужках. Легко показати, що другий вираз перетворюється в нуль за умови, коли $l = 0$, а $m \neq 0$. В цьому випадку в першому рівнянні вираз у фігурних дужках не дорівнюватиме нулю, але виконується умова рівності нулю для всього виразу (4.39).

В результаті нескладних перетворень отримаємо

$$\sigma_2 - \sigma_3 - 2\left(\sigma_2 - \sigma_3\right)m^2 = 0 \quad \text{або} \quad \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)\left(1 - 2m^2\right) = 0.$$

Звідси $m = \cos\beta = \pm\sqrt{2}/2$, а кут $\beta = \pm 45°$.

Таким чином за цієї умови максимальні дотичні напруження будуть діяти в площадках, спрямовуючі косинуси нормалей для яких $l = 0;\ m = \pm\sqrt{2}/2;\ n = \pm\sqrt{2}/2$. Це площадка, паралельна головній осі 1 і рівнонахилена до двох інших головних осей 2 і 3.

Величину повного дотичного напруження в цій площадці отримаємо, підставивши знайдені значення для спрямовуючих косинусів її нормалі у вираз (4.38).

$$\tau_\nu^2 = \sigma_3^2 + \frac{1}{2}\left(\sigma_2^2 - \sigma_3^2\right) - \left[\sigma_3 + \frac{1}{2}\left(\sigma_2 - \sigma_3\right)\right]^2 = \frac{1}{4}\left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2. \qquad (4.41)$$

Отже $\tau_{1max} = \pm\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$.

Якщо покласти умову, що $l \neq 0$, а $m = 0$, то аналогічно отримаємо спрямовуючі косинуси нормалі до площадки, паралельної до головної осі 2: $m = 0$; $l = \pm\sqrt{2}/2$; $n = \pm\sqrt{2}/2$, в якій діятимуть максимальні дотичні напруження $\tau_{2max} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$.

Для третьої площадки, яка буде паралельна осі 3, спрямовуючі косинуси нормалі, за аналогією з попередніми випадками, $n = 0$; $l = \pm\sqrt{2}/2$; $m = \pm\sqrt{2}/2$, а величина найбільшого дотичного напруження $\tau_{3max} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$.

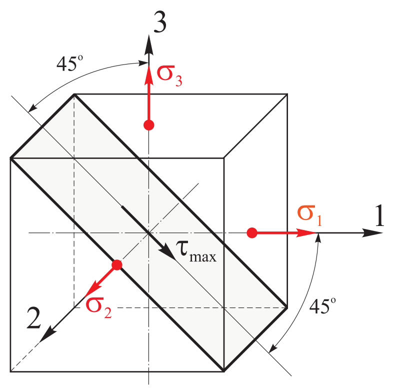


Рис. 4.17 Площадка дії найбільшого дотичного напруження в точці деформованого тіла

Отримані результати дозволяють зробити висновок щодо величини максимального повного дотичного напруження в точці з усіх можливих його значень. Найбільшим з отриманих значень максимальних дотичних напружень буде те, для якого різниця між головними напруженнями за абсолютною величиною буде найбільшою. Беручи до уваги правило розстановки індексів при головних напруженнях (4.16), приходимо до остаточного висновку, що

$$\boxed{|\tau_{max}| = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}} \qquad (4.42)$$

Найбільше дотичне напруження в точці деформованого тіла діє в площадці, рівнонахиленій до напрямків найбільшого σ_1 і найменшого σ_3 головних напружень (рис. 4.17) і дорівнює піврізниці величин цих напружень.

Приклад 4.5 *Знайти найбільші дотичні напруження в точці у двох випадках напруженого стану (див. приклад 4.4, рис. 4.16). Вказати площадки, в яких вони діятимуть. Як вплине на величину найбільшого дотичного напруження зміна напрямку σ_z у другому варіанті напруженого стану (рис. 4.16 б)?*

За першого варіанту напруженого стану (рис. 4.16 а) найбільше дотичне напруження, згідно з (4.42),

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} = \frac{40 + 20}{2} = 30\ \text{МПа}.$$

Діє це напруження в площадці, паралельній осі У і рівнонахиленій до осей Х і Z.

За другим варіантом

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} = \frac{40+30}{2} = 35\ МПа.$$

Це напруження діє в площадці, паралельній осі Z і рівнонахиленій до осей Х і У.

Якщо в другому варіанті напруженого стану (рис. 4.16 б) змінити напрямок σ_z на протилежний, то це жодних наслідків для максимального дотичного напруження не матиме, адже при цьому воно хоч і змінить свій знак, проте залишиться середнім головним напруженням σ_2, яке не впливає на величину τ_{max}.

4.1.9. Плоский напружений стан

В умовах плоского напруженого стану рівняння прямої та оберненої задач отримуємо із загальних співвідношень для об'ємного напруженого стану. Всі перетворення тут пов'язані з поворотом систем координат (площадок) у площині.

4.1.9.1. Пряма задача плоского напруженого стану

Припустимо, що з трьох головних напружень діють лише два: σ_1 і σ_2. Третє головне напруження σ_3=0. Зобразимо елемент у вигляді прямокутника, як показано на рис.4.18.

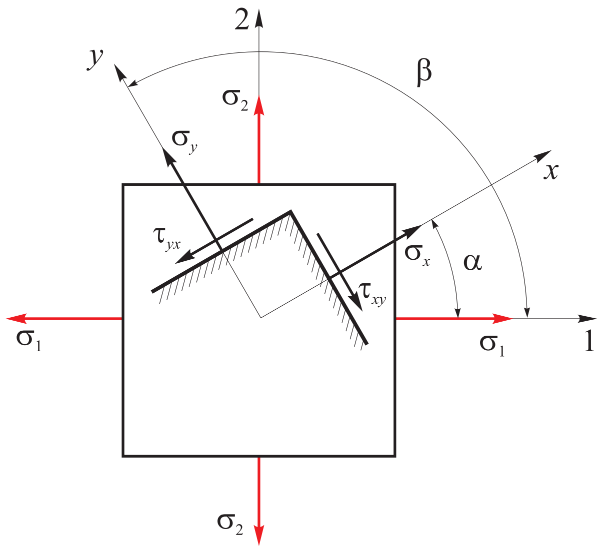


Рис. 4.18 Плоский напружений стан: пряма задача

Визначимо напруження у взаємно перпендикулярних площадках, нахилених до головних осей під кутами α (назвемо її площадкою α) і β (назвемо її площадкою β).

Скористаємось формулами (4.31) і (4.32). В нашому випадку вони набудуть вигляду

$$\sigma_\nu = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2,$$

$$\tau_{\nu\mu} = \sigma_1 l l' + \sigma_2 m m'.$$

Для площадки α

$$\sigma_x = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2$$

Тут $l_1 = \cos\alpha$, $m_1 = \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$ – спрямовуючі косинуси нормалі x відносно головних осей 1 і 2. Тоді

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha.$$

Для площадки β

$$\sigma_y = \sigma_1 l_2^2 + \sigma_2 m_2^2 .$$

Тут $l_2 = \cos\beta$, $m_2 = \cos(90° - \beta) = \sin\beta$ – спрямовуючі косинуси нормалі y відносно головних осей 1 і 2. Тоді

$$\sigma_y = \sigma_1 \cos^2\beta + \sigma_2 \sin^2\beta .$$

Дотичні напруження на площадці α,

$$\tau_{\nu\mu} = \sigma_1 l_1 l_1' + \sigma_2 m_1 m_1'$$

Тут $l_1' = \cos\left[-(90° - \alpha)\right] = \sin\alpha$, $m_1' = \cos\left[-(90° + (90° - \alpha))\right] = -\cos\alpha$ (див. рис. 4.18) – спрямовуючі косинуси напрямку дії τ_{xy}. Тоді

$$\tau_{xy} = \sigma_1 \cos\alpha \sin\alpha + \sigma_2 \sin\alpha(-\cos\alpha) = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha .$$

За законом парності дотичних напружень $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Враховуючи, що $\beta = 90° + \alpha$, остаточно отримаємо такі співвідношення для прямої задачі плоского напруженого стану:

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \sin^2\alpha ; \tag{4.43}$$

$$\sigma_y = \sigma_1 \sin^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\alpha ; \tag{4.44}$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\sin 2\alpha . \tag{4.45}$$

Примітка 4.2. ***Напруження в правій частині рівнянь (4.43) – (4.45) можуть бути з будь-якою комбінацією індексів.***

Примітка 4.3. ***Головні напруження в рівняння (4.43) – (4.45) слід підставляти обов'язково з урахуванням їх знака.***

Примітка 4.4. ***Якщо результат обчислень нормального напруження вийшов зі знаком плюс, то це напруження діє в бік розтягу, а якщо зі знаком мінус – то в бік стиску.***

Примітка 4.5. ***Дотичне напруження вважається додатним, якщо воно намагається обертати елемент за годинниковою стрілкою.***

4.1.9.2. Обернена задача плоского напруженого стану

Як уже відзначалось в п. 4.1.5, третій інваріант тензора напружень в умовах плоского напруженого стану $I_{\sigma 3}=0$. Тоді кубічне рівняння (4.24) набуває виду:

$$\sigma\left(\sigma^2-I_{\sigma 1}\sigma+I_{\sigma 2}\right)=0.$$

Один корінь цього рівняння дорівнює нулю, що й зрозуміло, адже маємо плоский напружений стан. Два інші корні можна знайти з квадратного рівняння

$$\sigma^2-I_{\sigma 1}\sigma+I_{\sigma 2}=0.$$

Визначимо величини і напрямки головних напружень для випадку плоского напруженого стану, схема якого представлена на рис. 4.19.

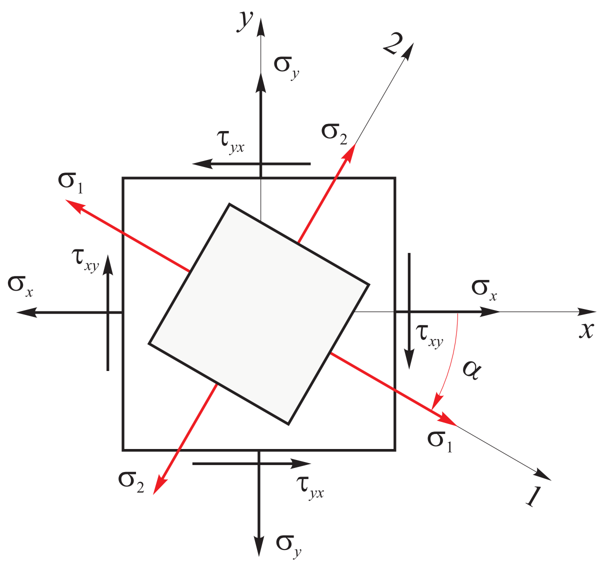


Рис. 4.19 Плоский напружений стан: обернена задача

Запишемо інваріанти напруженого стану для даному випадку:

$$I_{\sigma 1}=\sigma_x+\sigma_y;$$

$$I_{\sigma 2}=\sigma_x\sigma_y-\tau_{xy}^2.$$

Підставивши ці вирази до квадратного рівняння, отримаємо

$$\sigma^2-\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\sigma+\left(\sigma_x\sigma_y-\tau_{xy}^2\right)=0.$$

Корні цього рівняння:

$$\sigma_{1,2}=\frac{1}{2}\left[\sigma_x+\sigma_y\pm\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau_{xy}^2}\right].$$

Щоб знайти напрямки головних напружень, необов’язково розв’язувати систему рівнянь (4.22) відносно спрямовуючих косинусів. Зручніше скористатися для цього формулами (4.43) – (4.45).

Віднімемо рівняння (4.44) від (4.43):

$$\sigma_x-\sigma_y=\left(\sigma_1-\sigma_2\right)\cos 2\alpha.$$

З іншого боку

$$2\tau_{xy}=\left(\sigma_1-\sigma_2\right)\sin 2\alpha.$$

Розділивши рівняння, отримаємо

$$\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \mathrm{tg}2\alpha .$$

Остаточно в загального випадку отримаємо такі співвідношення для оберненої задачі плоского напруженого стану:

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \frac{1}{2}\left[\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}\right]; \qquad (4.46)$$

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} . \qquad (4.47)$$

Примітка 4.6. ***Напруження в праву частину рівняння (4.46) слід підставляти з урахуванням їх знака.***

Примітка 4.7. ***Індекси при головних напруженнях розставляють після визначення їх величини і знаку згідно з правилом розстановки індексів (4.16).***

Примітка 4.8. ***При визначенні напрямку головних напружень за формулою (4.47) визначають абсолютну величину кута α. Потім знайдений кут відкладають від алгебраїчно більшого з заданих неголовних нормальних напружень в напрямку дії дотичного напруження на цій площадці (див. рис. 4.19). Проведена таким чином вісь буде головною віссю, вздовж якої діє алгебраїчно більше зі знайдених головних напружень.***

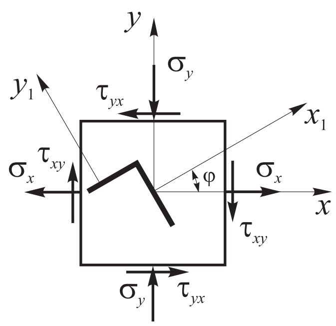


Рис. 4.20 *До прикладу* 4.6

Приклад 4.6 *Знайти напруження на взаємно перпендикулярних площадках з нормалями x_1 та y_1 (див. рис. 4.20), якщо напруження на вихідних площадках з нормалями x та y $\sigma_x = 100$ МПа, $\sigma_y = 60$ МПа, $\tau_{xy} = 80$ МПа. Кут між нормалями x та x_1 $\varphi = 30°$.*

Задачу розв'язуватимемо, розглядаючи послідовно обернену та пряму задачі напруженого стану. Тобто, як проміжний етап розв'язку, знайдемо величини головних напружень та орієнтацію головних площадок.

1. *Знайдемо величину і напрямок головних напружень.*

За формулами (4.46) *знайдемо величини головних напружень:*

$$\sigma_{\substack{max \\ min}} = \frac{1}{2}\left[\sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + 4\tau_{xy}^2}\right] = \frac{1}{2}\left[100 - 60 \pm \sqrt{\left(100 + 60\right)^2 + 4 \cdot 80^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left(40 \pm 226,27\right)\ МПа$$

Звідси $\sigma_1 = \sigma_{max} = 133,135\ МПа$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = \sigma_{min} = -93,135\ МПа$.

Перевірку правильності виконаних обчислень виконаємо, знайшовши перші інваріанти напруженого стану для неголовних і головних площадок:

$$I_{\sigma 1} = \sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3;$$

$$100 - 60 = 133,135 - 93,135.$$

Отже, $40\ МПа = 40\ МПа$, *а значить обчислення виконані правильно.*

Знайдемо положення головних площадок. За формулою (4.47)

$$\mathrm{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 80}{100 + 60} = 1.$$

Звідси $\alpha = 22,5°$.

Зобразимо головні площадки на схемі (рис. 4.21*), беручи до уваги зауваження, сформульовані у примітках* 4.8.

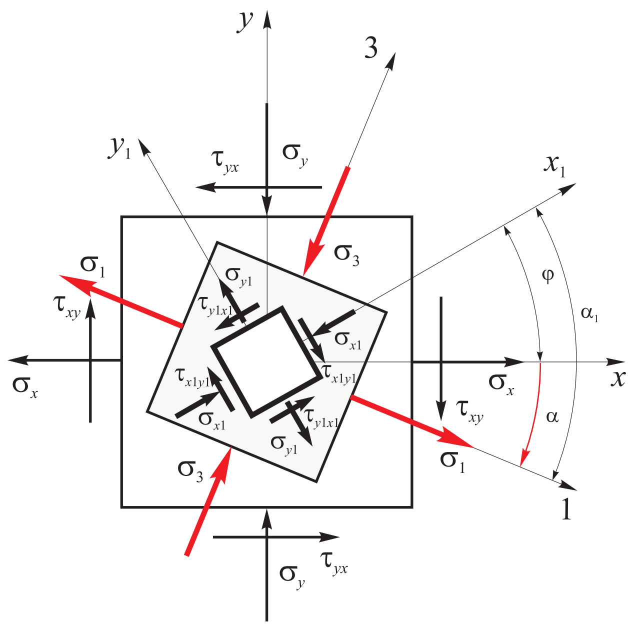


Рис. 4.21 Головні та неголовні площадки для плоского напруженого стану (*до прикладу* 4.6)

2. *Розв'яжемо пряму задачу: знаючи головні напруження, знайдемо напруження на площадках з нормалями* x_1 *та* y_1. *Для цього визначимо кут між нормаллю* x_1 *та віссю* 1*:*

$$\alpha_1 = 30° + 22,5° = 52,5°.$$

Тоді за формулами (4.43) – (4.45)

$$\sigma_{x1} = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_3 \sin^2 \alpha_1 = 133,135 \cdot 0,3706 - 93,135 \cdot 0,6294 = -9,28\ МПа,$$

$$\sigma_{y1} = \sigma_1 \sin^2 \alpha_1 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_1 = 133,135 \cdot 0,6294 - 93,135 \cdot 0,3706 = 49,28\ МПа.$$

Перевірка: $\sigma_{x1}+\sigma_{y1}=-9,28+49,28=40\ МПа=I_{\sigma1}$.

$$\tau_{xy}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\sin 2\alpha=\frac{133,135+93,135}{2}\sin 105^\circ=113,135\cdot 0,9659=109,28\ МПа.$$

Дотичне напруження на площадці з нормаллю x_1 *додатне, отже направляємо його за годинниковою стрілкою.*