

## Лекція №2

## Розділ 2. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

*...Там де тонко – там і рветься.*

У цій народній приказці сконцентрований багатовіковий досвід використання нашими предками у повсякденному житті різноманітних предметів, які ми зараз називаємо тілами, деталями, елементами тощо. Вона досить точно відбиває той факт, що міцність та жорсткість цих предметів не в останню чергу залежить від розмірів їх перерізів.

Якщо мова йде про стержень як найпоширенішу в техніці та будівництві модель форми тіла, то його опір деформуванню часто залежить не лише від розмірів перерізу, а й форми цього перерізу та його розташування відносно діючих навантажень.

Розглянемо основні геометричні характеристики поперечних перерізів, які визначають опір стержня тому чи іншому виду деформації.

### Тема 2.1. Статичні моменти площі та координати центру ваги

Візьмемо довільний переріз стержня (рис. 2.1).

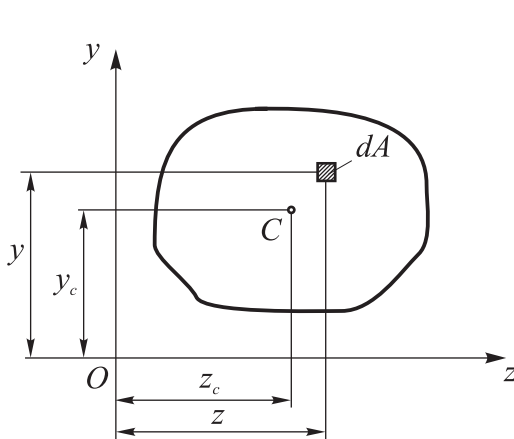


Рис. 2.1. Плоский переріз із центром ваги в точці C

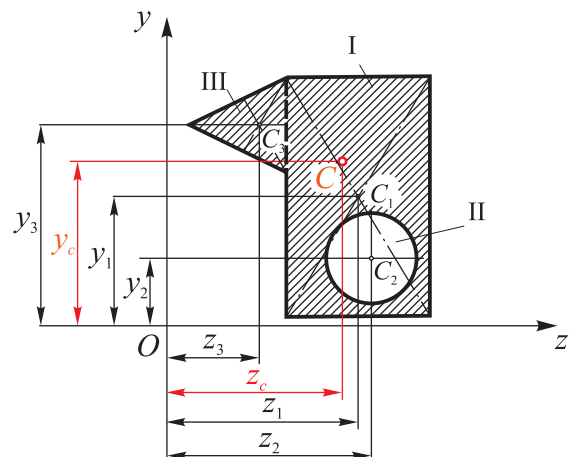


Рис. 2.2. Переріз, що складається з простих фігур

Виділимо елемент площі  $dA$  з координатами  $y, z$ . Статичний момент елемента площі відносно деякої осі обчислимо, за аналогією з моментом сили, як добуток його площі на відстань до цієї осі. Наприклад, для осі  $OZ$  матимемо

$$dS_z = y \cdot dA. \quad (2.1)$$

Аналогічно для осі  $OY$

$$dS_y = z \cdot dA. \quad (2.2)$$

Для всієї площі перерізу  $A$  статичні моменти відносно осей  $OZ$  і  $OY$  дорівнюватимуть:

$$S_z = \int_F y dA; \quad S_y = \int_F z dA. \quad (2.3)$$

Вимірність статичного моменту площі відносно осі – одиниця довжини в кубі, наприклад  $\text{мм}^3$ .

Якщо  $y_C, z_C$  – координати центру ваги перерізу, а  $A$  – його площа, то статичні моменти відносно осей  $OZ$  і  $OY$  можна обчислити як

$$S_z = y_C A; \quad S_y = z_C A. \quad (2.4)$$

Порівнюючи (2.3) та (2.4), отримаємо вирази для визначення координат центру ваги перерізу:

$$y_C = \frac{\int y dA}{A}; \quad z_C = \frac{\int z dA}{A}. \quad (2.5)$$

Якщо поперечний переріз складається з простих геометричних фігур (рис. 2.2), площі і положення центрів ваги яких відомі, статичний момент такого перерізу відносно деякої осі визначається як сума статичних моментів площ фігур, які складають даний переріз, відносно цієї осі.

$$S_z = \sum_{i=1}^n y_{Ci} A_i; \quad S_y = \sum_{i=1}^n z_{Ci} A_i. \quad (2.6)$$

Координати центру ваги такого перерізу знаходять зі співвідношень:

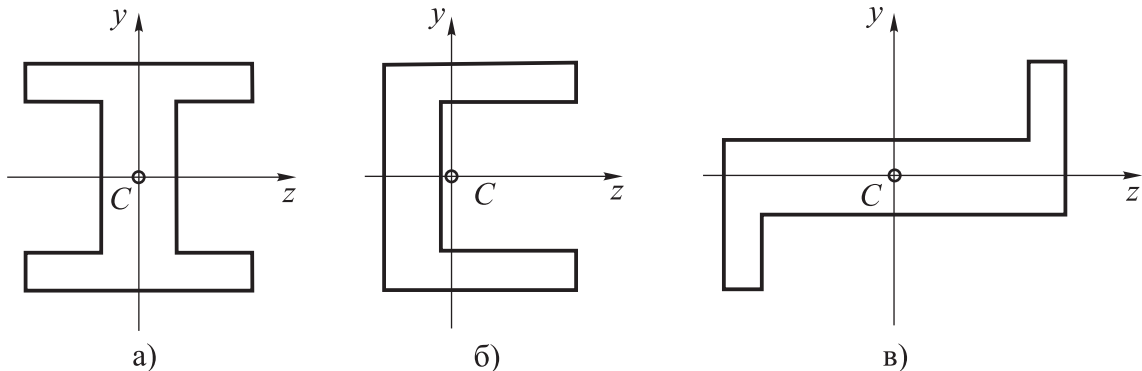
$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n y_{Ci} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad z_C = \frac{\sum_{i=1}^n z_{Ci} A_i}{\sum_{i=1}^n A_i}. \quad (2.7)$$

Тут  $\sum_{i=1}^n A_i$  – сумарна площа перерізу.

**Примітка 2.1. Координати центрів ваги площ у формулах (2.7) підставляють з урахуванням їх знака у вибраній системі координат.**

**Примітка 2.2.** Якщо переріз має отвір (див. рис. 2.2), то його статичний момент, як і площа, вважається від'ємним.

Часто положення центру ваги складного перерізу легко визначити без додаткових обчислень. Так, для перерізу, що має дві осі симетрії (рис. 2.3 а), центр ваги лежить на їх перетині. У перерізі з однією віссю симетрії (рис. 2.3 б) центр ваги лежить на цій осі. В даному випадку визначенню підлягає лише одна його координата. В деяких випадках переріз не має осей симетрії, але він симетричний відносно деякої точки, яка і є його центром ваги (рис. 2.3 в)



**Рис. 2.3.** Симетричні перерізи: а – з двома осями симетрії; б – з однією віссю симетрії; в – з центром симетрії

## Тема 2.2. Моменти інерції плоских фігур

Розрізняють *осьові, полярні та відцентрові моменти інерції* плоских фігур.

### 2.2.1. Осьові моменти інерції

**Осьовим моментом інерції площі фігури називається інтеграл добутків площ елементарних площадок на квадрати їх відстаней від заданої осі.**

Так, моменти інерції фігури, зображеної на рис. 2.4, відносно осей  $OZ$  і  $OY$  відповідно обчислюються як

$$I_z = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A z^2 dA. \quad (2.8)$$

**Приклад 2.1** Визначити момент інерції прямокутника відносно центральних осей  $Y$  і  $Z$ , паралельних його сторонам (рис. 2.5)

Щоб визначити момент інерції відносно осі  $Z$ , виділимо елемент площі  $dA$  у вигляді смуги, паралельної цій осі. Тоді, згідно з формулами (2.8), запишемо:

$$I_z = \int_A y^2 dA = 2 \int_0^{h/2} y^2 b dy = \frac{bh^3}{12}.$$

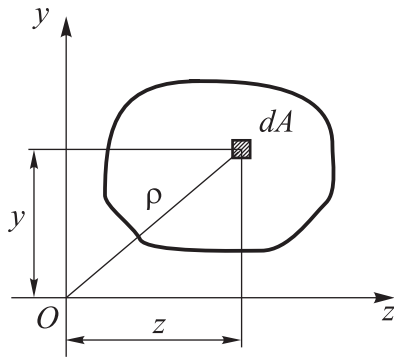


Рис. 2.4. Плоска фігура

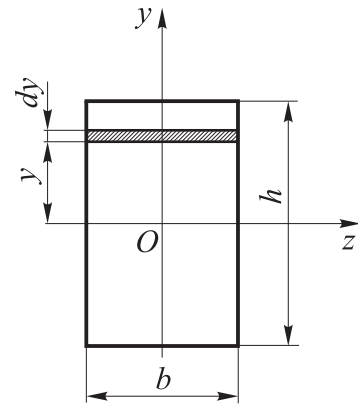


Рис. 2.5. Прямокутник

Очевидно, що відносно осі  $Y$  момент інерції дорівнюватиме

$$I_y = \frac{hb^3}{12}.$$

**Приклад 2.2** Знайти момент інерції трикутника відносно осі  $OZ$ , що збігається з його основою (рис. 2.6)

Виділимо елемент площі у вигляді смуги, паралельної осі  $OZ$ . Його площа

$$dA = b(y)dy.$$

Ширину смуги можна виразити з умови пропорційності відрізків:

$$\frac{db(y)}{h-y} = \frac{b}{y}.$$

Звідси

$$b(y) = (b/h)(h-y).$$

Скориставшись формулою (2.8), отримаємо

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 (b/h)(h-y) dy = \frac{b}{h} \int_0^h y^2 (h-y) dy = \frac{bh^3}{12}.$$

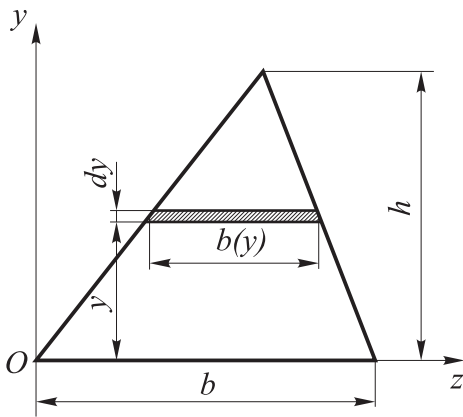
### 2.2.2. Полярний момент інерції

**Полярним моментом інерції площі фігури відносно деякої точки (полюса) називається інтеграл добутків площ елементарних площадок на квадрати їх відстаней від цієї точки.**

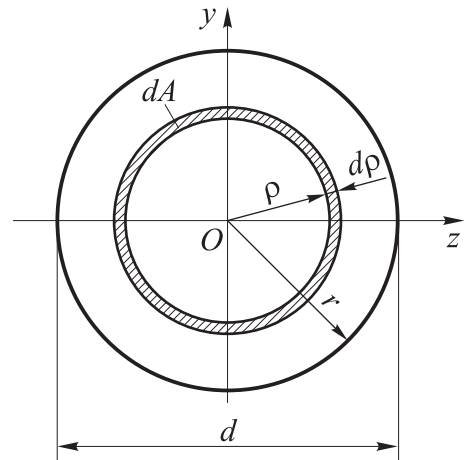
Взявши в якості полюса точку  $O$  (див. рис. 2.4), запишемо

$$I_p = \int_A \rho^2 dA. \quad (2.9)$$

**Приклад 2.3** Визначити полярний момент інерції площі круга відносно його центра (рис. 2.7).



**Рис. 2.6** Трикутник з елементом площі у вигляді смуги



**Рис. 2.7** Круг з кільцевим елементом площі

Виділимо елемент площі у вигляді кільця радіусом  $\rho$ . Його площа

$$dA = 2\pi\rho d\rho.$$

Полярний момент інерції відносно центру круга

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Якщо полюс є початком системи координатних осей  $ZOY$  (див. рис. 2.4), то, враховуючи, що  $\rho^2 = z^2 + y^2$ , беручи до уваги властивості інтеграла, отримаємо

$$I_p = \int_A (z^2 + y^2) dA = \int_A z^2 dA + \int_A y^2 dA = I_z + I_y. \quad (2.10)$$

**Полярний момент площі фігури відносно деякої точки дорівнює сумі осевих моментів цієї фігури відносно будь-яких двох взаємно перпендикулярних осей, що проходять через дану точку.**

Отже момент інерції круга відносно діаметра  $I_z = I_y = 0,5I_p = \pi d^4/64$ .

**Примітка 2.3.** Осьові та полярні моменти інерції можуть бути лише додатними величинами.

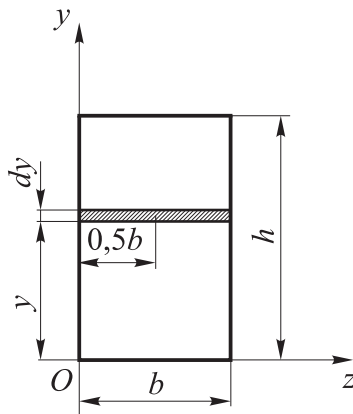
### 2.2.3. Відцентровий момент інерції

**Відцентровим моментом інерції фігури називається інтеграл добутків площ елементарних площадок на їх відстані від координатних осей.**

Для осей  $OZ$  і  $OY$  (див. рис. 2.4) запишемо:

$$I_{yz} = \int_A yz dA. \quad (2.11)$$

**Приклад 2.4** Визначити відцентровий момент інерції площі прямокутника відносно координатних осей  $OZ$  і  $OY$  (рис. 2.8).



**Рис. 2.8** Прямокутник з елементом площі у вигляді смуги

Виділимо елемент площі у вигляді смуги, паралельної осі  $OZ$ . Його площа

$$dA = b dy.$$

Скориставшись формулою (2.11), отримаємо

$$I_{yz} = \int_A yz dA = \int_0^h y \cdot \frac{1}{2} b \cdot b dy = \frac{b^2}{2} \int_0^h y dy = \frac{b^2 h^2}{4}.$$

Як зазначалось, осьові і полярні моменти – завжди додатні. Що стосується відцентрового моменту інерції, то, судячи з виразу (2.11), його величина може набувати як додатних, так і від’ємних значень, або дорівнювати нулю. Все залежить від розташування осей відносно фігури.

Якщо фігура розташована у першому квадранті, наприклад прямокутник на рис. 2.8, то значення відцентрового моменту додатне, адже всі елементи площі мають додатні координати  $y$  і  $z$ . Додатне значення  $I_{yz}$  матимемо і при розташуванні фігури у третьому квадранті, коли координат  $y$  і  $z$  одночасно від’ємні. Якщо розташувати фігуру у другому або четвертому квадрантах, то для будь-якого елемента площі координати  $y$  і  $z$  матимуть протилежні знаки, а відцентровий момент  $I_{yz}$  набуватиме від’ємних значень.

Якщо фігура буде розташована у двох чи більше квадрантах, то знак відцентрового моменту залежатиме від розподілу площі фігури між квадрантами.

Окремим випадком є осі, принаймні одна з яких є віссю симетрії фігури. Розглянемо прямокутник у системі координат  $y$  і  $z$ , у якій вісь  $y$  є віссю симетрії (рис. 2.9).

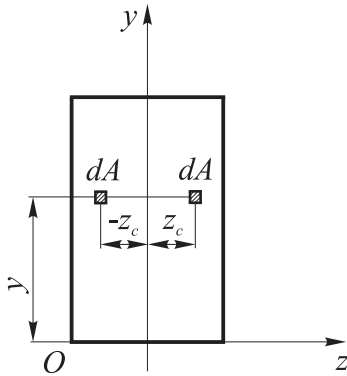


Рис. 2.9 Прямокутник як симетрична фігура

Будь-якому елементу площі  $dA$ , узятому з додатною координатою, відповідає такий-самий елемент з такою ж координатою  $y$ , але з від'ємною координатою  $z$ . Отже інтеграл у виразі (2.11) перетворюється в нуль, оскільки підінтегральні добутки виду  $yzdA$  взаємно знищуються. Таким чином, можемо зробити висновок.

**Відцентровий момент інерції площі фігури відносно координатних осей, одна з яких є віссю симетрії, дорівнює нулю.**

Якщо знову розглянути приклади, зображені на рис. 2.3, то відцентрові моменти відносно осей  $y$  і  $z$  для перерізів а) і б) дорівнюють нулю. Проте цей висновок не стосується перерізу в), оскільки тут осі  $y$  і  $z$  не є осями симетрії.

### Тема 2.3. Визначення моментів інерції відносно паралельних осей

Моменти інерції фігури відносно довільних осей пов'язані з моментами інерції цієї фігури відносно паралельних їм *центральної осей*, тобто осей, що проходять через центр ваги фігури. Цей зв'язок встановлює *теорема про паралельний перенос осей*.

Припустимо, що точка  $C$  – центр ваги фігури (рис. 2.10). Моменти інерції площі цієї фігури відносно центральних осей  $Y$  і  $Z$  відомі:

$$I_y = \int_A z^2 dA; \quad I_z = \int_A y^2 dA; \quad I_{yz} = \int_A yz dA. \quad (2.12)$$

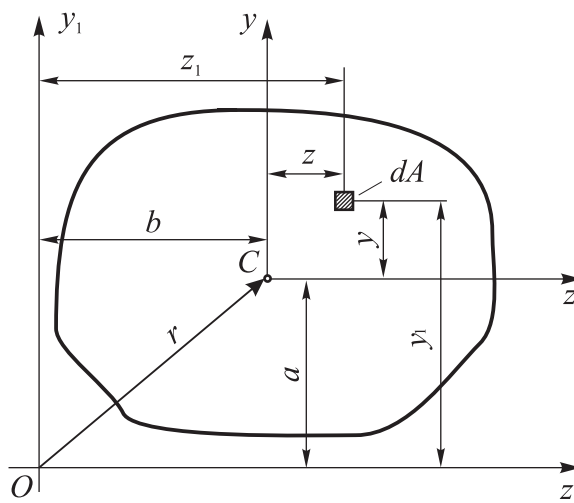


Рис. 2.10 Плоска фігура в системах координат з паралельними осями

Визначимо моменти інерції відносно осей  $Y_1$  і  $Z_1$ , паралельних центральним:

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA; \quad I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA; \quad I_{y_1 z_1} = \int_A y_1 z_1 dA. \quad (2.13)$$

Враховуючи, що  $z_1 = z + b$ , а  $y_1 = y + a$  (див. рис. 2.10), отримаємо:

$$I_{y_1} = \int_A z_1^2 dA = \int_A (z + b)^2 dA = \int_A z^2 dA + 2b \int_A z dA + b^2 \int_A dA; \quad (2.14)$$

$$I_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA; \quad (2.15)$$

$$I_{y_1 z_1} = \int_A y_1 z_1 dA = \int_A (y + a)(z + b) dA = \int_A yz dA + b \int_A y dA + a \int_A z dA + ab \int_A dA. \quad (2.16)$$

В цих виразах інтеграли  $\int_A z dA = S_y$ ;  $\int_A y dA = S_z$ , – статичні моменти площі фігури відносно центральних осей, – дорівнюють нулю. Тоді вирази (2.14) – (2.16) набувають вигляду:

$$I_{y_1} = I_y + b^2 A; \quad (2.17)$$

$$I_{z_1} = I_z + a^2 A; \quad (2.18)$$

$$I_{y_1 z_1} = I_{yz} + abA. \quad (2.19)$$

**Момент інерції площі фігури відносно довільної осі дорівнює моменту інерції цієї фігури відносно центральної осі, паралельної даній, плюс добуток квадрату відстані між цими осями на площу фігури.**

**Відцентровий момент інерції площі фігури відносно довільних двох взаємно перпендикулярних осей дорівнює відцентровому моменту інерції цієї фігури відносно центральних осей, паралельних даним, плюс добуток відстаней між цими осями на площу фігури.**

**Примітка 2.4. Координати  $a$  і  $b$  у виразах (2.17) – (2.19) слід підставляти з урахуванням їх знака.**

**Примітка 2.5.** Згідно з виразами (2.17) і (2.18) моменти інерції фігури відносно центральних осей завжди менші від моментів інерції цієї фігури відносно будь-яких довільних осей, їм паралельних.

Що стосується полярного моменту інерції фігури відносно точки  $O$  (див. рис. 2.10), то, скориставшись формулою (2.10), з урахуванням (2.17) та (2.18) запишемо:

$$I_{pO} = I_{y_1} + I_{z_1} = I_y + b^2 A + I_z + a^2 A = I_y + I_z + (a^2 + b^2) A.$$

Або

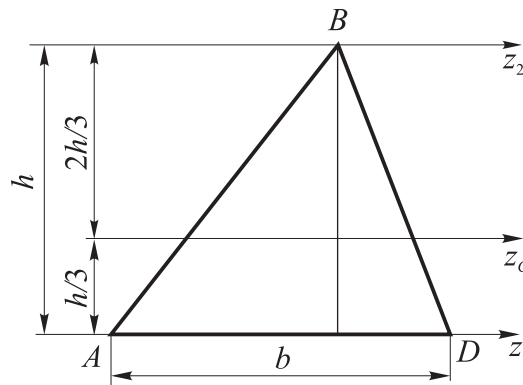
$$I_{pO} = I_{pC} + r^2 A, \quad (2.20)$$

де  $r^2 = a^2 + b^2$  – квадрат відстані між центрами  $O$  і  $C$ .

**Полярний момент інерції площі фігури відносно довільної точки, що лежить у її площині, дорівнює полярному моменту інерції цієї фігури відносно її центру ваги плюс добуток квадрату відстані між цими точками на площу фігури.**

Теорема про паралельний перенос осей значно полегшує обчислення моментів інерції фігур. Розглянемо кілька прикладів таких розрахунків.

**Приклад 2.5** Визначити осьовий момент інерції площі трикутника відносно осі  $Z_2$ , що проходить через його вершину  $B$  паралельно основі (рис. 2.11), якщо момент інерції відносно основи трикутника відомий.



**Рис. 2.11** Трикутник з системою паралельних осей

Оскільки осі  $Z_1$  і  $Z_2$  нецентральні, то на пряму скористатися теоремою про паралельний перенос осей ми не можемо, – слід спочатку знайти момент інерції трикутника відносно центральної осі  $Z_C$ . Положення цієї осі відносно основи відоме. Відомий також

момент інерції трикутника відносно основи (див. приклад 2.2). З формули для паралельного переносу знаходимо момент інерції відносно центральної осі:

$$I_{zC} = I_{z_1} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 A.$$

Тоді

$$I_{z_2} = I_{zC} + \left(\frac{2h}{3}\right)^2 A = I_{z_1} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 A + \left(\frac{2h}{3}\right)^2 A.$$

Враховуючи, що  $I_{z_1} = bh^3/12$ , а  $F = bh/2$ , отримаємо

$$I_{z_2} = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} + \left(\frac{2h}{3}\right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{4}.$$

До речі, момент інерції трикутника відносно центральної осі  $I_{zC} = bh^3/12 - (h/3)^2 bh/2 = bh^3/36$ .

**Приклад 2.6** Визначити полярний момент інерції площі круга відносно точки, що лежить на його контурі.

Скориставшись формулою (2.20), отримаємо

$$I_p = I_{pC} + r^2 A = \frac{\pi d^4}{32} + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \left(\frac{\pi d^2}{4}\right) = \frac{3\pi d^4}{32}.$$

**Приклад 2.7** Визначити відцентровий момент інерції площі прямокутника відносно координатних осей що збігаються з його сторонами.

Даний приклад ми розв'язали шляхом інтегрування (див. приклад 2.4). Проте його можна дуже легко розв'язати, використавши теорему паралельного переносу осей:

$$I_{yz} = I_{yCzC} + acA.$$

Враховуючи, що у прямокутника центральні осі, паралельні сторонам, є осями симетрії, тобто  $I_{yCzC} = 0$ , а відстані між осями  $a = h/2$ ,  $c = b/2$ , отримаємо:

$$I_{yz} = \frac{h}{2} \frac{b}{2} bh = \frac{b^2 h^2}{4}.$$