

Приложение 6

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ. СТАТИКА. БОЛЬШИЕ ДЕФОРМАЦИИ (теория)

Д6.1. О классических типах формулирования алгоритмов решения геометрически нелинейных краевых задач

После того, как будут получены системы алгебраических уравнений (САУ) для итерационного решения краевых задач с геометрической нелинейностью, проявятся *две проблемы*:

- во-первых, на момент вычисления компонент САУ текущая геометрия тела не определена;
- во-вторых, напряжения σ^{ij} (Эйлера-Коши), вычисленные в разных конфигурациях, нельзя просто так складывать, поскольку нужно учитывать вращение площадок, на которых они вычислялись и вычисляются.

Первая проблема вынуждает искать решение на основе *предварительно* определенной (*опорной*) геометрии тела, вторая – проводить преобразования напряжений.

Если в качестве опорной геометрии тела на всех этапах нагружения используется *начальная* геометрия, то такой подход называют „полная формулировка Лагранжа” (Total Lagrange – TL). Иначе, если в качестве опорной геометрии тела на всех этапах нагружения используется геометрия, которая *создана предыдущим этапом нагружения*, то такой подход называют „модифицированная формулировка Лагранжа” (Updated Lagrange – UL).

TL-формулировка можно применять лишь тогда, когда при получении решения не имеет значения *история нагружения* тела. Эта история может быть значащей:

- при потере устойчивости геометрии тела, если нужно изучать дальнейшее его напряженно-деформированное состояние, в частности, после так называемого „прощелкивания” конструкции;
- при сложном упруго-пластическом нагружении, когда в разных частях тела реализуются разные траектории деформирования, в частности, одновременно происходят процессы активного упруго-пластического деформирования и упругой разгрузки;
- при действительно значительных деформациях, когда теоретически нельзя складывать даже деформации, а можно складывать только скорости деформаций, т.е. реализовывать формулировку Эйлера. Погрешность, которая возникает при простом сложении деформаций, считается небольшой где-то в пределах до 2 процентов деформации.

При применении UL-формулировки нужно автоматически всю историю нагружения разделять на отдельные этапы и на всех этапах обеспечивать относительно небольшие приращения нагрузки. Наличие многих этапов обычно увеличивает время получения решения краевой задачи. Поэтому, если отсутствуют неупругие деформации или упруго-пластическое нагружение – пропорциональное, а деформации – относительно малы, использование формулировки TL обычно эффективнее, чем UL (все нагружение можно провести за один этап). И лишь тогда, когда краевая задача обязывает применение малых приращений нагрузки, нужно применять формулировку UL.

Далее коротко рассмотрим эти обе формулировки и сопутствующие проблемы.

Использование базовой, а не текущей, конфигурации тела нуждается в перерасчете величин, фигурирующих в формулах, на базовую конфигурацию. Поэтому изменяются даже названия (меры) тензоров напряжений и деформаций.

В таблице Д6.1 приведена краткая информация о характерных ситуациях при наличии физической и/или геометрической нелинейности (формулировка Эйлера с неподвижной сеткой и ALE (смешанная Эйлера-Лагранжа) – не рассматриваются).

Таблица Д6.1. Ситуации при моделировании нелинейных краевых задач о НДС тел

Тип анализа	Описание ситуации	Типы формулировок	Меры деформаций и напряжений
Только нелинейность свойств материала (только физическая нелинейность)	Бесконечно малые параллельные перемещения и вращения; соотношения „напряжения-деформации” являются нелинейными	Только нелинейность свойств материала (Materially nonlinear only – MNO)	Напряжения Эйлера-Коши, малые деформации Грина-Лагранжа (Cauchy stress, small Green-Lagrange strain)
Большие параллельные перемещения, большие вращения, но малые деформации	Параллельные перемещения и вращения волокон являются большими, но удлинения волокна и угловые изменения между волокнами являются малыми; соотношения „напряжения-деформации” могут быть линейными или нелинейными	Полная формулировка Лагранжа (Total Lagrange – TL)	Напряжения Пиола-Кирхгофа 2-го рода, малые деформации Грина-Лагранжа (Second Piola-Kirchhoff stress, small Green-Lagrange strain)
		Модифицированная формулировка Лагранжа (Updated Lagrange – UL)	Напряжения Эйлера-Коши, малые деформации Альманси (Cauchy stress, small Almansi strain)
Большие параллельные перемещения, большие вращения и большие деформации	Параллельные перемещения и вращения волокон являются большими; удлинение волокон и угловые изменения между волокнами также являются большими, соотношения „напряжения-деформации” могут быть линейными или нелинейными	Полная формулировка Лагранжа (Total Lagrange – TL)	Напряжения Пиола-Кирхгофа 2-го рода, деформации Грина-Лагранжа (Second Piola-Kirchhoff stress, large Green-Lagrange strain)
		Модифицированная формулировка Лагранжа (Updated Lagrangian – UL)	Напряжения Эйлера-Коши, логарифмические деформации Генки (Cauchy stress, logarithmic strain Hencky)

Итак, нужно рассмотреть вопрос о деформациях Грина-Лагранжа, о тензоре Эйлера-Коши и втором тензоре напряжений Пиола-Кирхгофа, а также об определяющих уравнениях, которые будут использоваться при формулировании постановок краевых задач.

Д6.2. Основные определения и соотношения, необходимые для формулирования алгоритмов решения геометрически нелинейных краевых задач

Постановка краевая задача сделана в Разделе Д5.1. Напомним, что рассмотрение вопросов ведем в „физической” (местной), т.е. в нормированной, системе координат с базисом (Д6.1). При этом не имеет значения расположение индексов (верхнее или нижнее). Если встречается верхнее расположение индексов, то это означает, что речь идет о контравариантных компонентах.

Д6.2.1. Системы координат. Метрический тензор

Системой отсчета $\mathfrak{X}$ называют совокупность по крайней мере 4-х точек, не лежащих в одной плоскости. Очевидно, что ее геометрия может быть и евклидовой.

В общем случае для описания состояния тела обычно вводят несколько координатных систем. Введем такие системы с ортогональными базисами:

- глобальную неподвижную декартову систему координат с базисом $\vec{k}_i$, осями X^i ; $i = 1, 2, 3$ и точкой M^0 , в которой помещается начало системы;

• глобальную неподвижную, в общем случае криволинейную систему координат с базисом $\vec{e}_i$ и осями $a^i = a^i(X^j)$; $i, j = 1, 2, 3$. Обычно она тоже имеет начало в точке M^0 , но это не является обязательным;

• локальную „вмороженную”, в общем случае криволинейную не ортогональную, систему координат с базисом $\vec{G}_i$, которая сопровождает каждую материальную точку тела с координатами $x^i = x^i(a^j, t)$; $i, j = 1, 2, 3$, т.е. на каждую такую точку указывает вектор $\vec{r} = \vec{r}(a^1, a^2, a^3, t)$, проведенный к ней из начала координат, в котором принимают $\vec{r} = \vec{0}$ (это всегда можно сделать путем параллельного переноса).

Условие $a^i = \text{const}$; $i = 1, 2, 3$ задает *координатную поверхность*. Две координатные поверхности a^i и a^j пересекаются (при $i \neq j$). Линия их пересечения называется *координатной линией*, она соответствует третьей координате a^k .

Три вектора базиса $\vec{e}_i$, который называется основным, задаются как

$$\vec{e}_i = \lim_{\Delta a^i \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta a^i} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial a^i}. \quad (\text{Д6.1})$$

Эти три вектора основного базиса являются касательными к координатным линиям в точке M^0 , которая определяет начало координатной системы.

Если координатная система $a^i = x, y, z$, т.е. является декартовой (ДСК), то все модули $|\vec{e}_i| = 1$.

Девять величин $g_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \frac{\partial \vec{a}}{\partial a^i} \cdot \frac{\partial \vec{a}}{\partial a^j}$ называют ковариантными компонентами симметричного метрического тензора. В ДСК

$$(g_{ij})_{\text{ДСК}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}). \quad (\text{Д6.2})$$

Здесь и всюду ниже в тексте δ_{ij} – символ Кронекера.

В точке M^0 начала координатной системы, наряду с основным, вводится взаимный базис $\vec{e}^i$ таким образом, чтобы $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta_j^i = \delta_{ij}$ (векторы $\vec{e}_i$ указывают направление координатных линий, а векторы $\vec{e}^i$ – перпендикулярны к координатным поверхностям). Аналогично g_{ij} вводится контравариантный симметричный метрический тензор с компонентами $g^{ij} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j$. Тогда

$$(g_{ij})(g^{jk}) = (g_{ij} \cdot g^{jk}) = \delta_i^k; \quad (g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}; \quad \vec{e}^i = g^{ij} \vec{e}_j; \quad \vec{e}_i = g_{ij} \vec{e}^j. \quad (\text{Д6.3})$$

С учетом (Д6.2) и (Д6.3)

$$(g^{ij})_{\text{ДСК}} = (g_{ij})_{\text{ДСК}} = \delta_{ij}. \quad (\text{Д6.4})$$

Согласно (Д6.1), бесконечно малое приращение $d\vec{r}$ вектора $\vec{r}$ представляется в виде $d\vec{a} = da^i \vec{e}_i$, с использованием (Д6.3) – аналогично: $d\vec{a} = da_i \vec{e}^i$.

Для удобства, в частности, чтобы метрика пространства не присутствовала в физических уравнениях, вводится локальный ортонормированный „физический” (местный) базис $\vec{b}_i$, т.е. такой, чтобы все три $|\vec{b}_i| = 1$. Этого можно достичь, если взять $\vec{b}_i$ в следующем виде (под радикалом здесь не суммировать):

$$\vec{b}_i = \vec{e}_i / \sqrt{g_{ii}} = \sqrt{g^{ii}} \vec{e}_i. \quad (\text{Д6.5})$$

Из (Д6.2), (Д6.4) и (Д6.5) следует, что в ДСК основной, взаимный и „физический” базисы совпадают, чего нельзя сказать о других, где базисах обычно различные.

Примечание Д6.1. Величина $\sqrt{g_{ii}} = |\vec{e}_i|$, т.е. является модулем соответствующего базисного вектора. Поэтому еще один вариант определения базисных векторов: $\vec{e}_i = \sqrt{g_{ii}} \vec{b}_i$.

Любой вектор $\vec{F}$ в основном, взаимном и „физическом” базисах имеет компоненты $F^i, F_i, \tilde{F}_i$ соответственно. Он выражается как

$$\vec{F} = F^i \vec{e}_i = F_i \vec{e}^i = \tilde{F}_i \vec{b}_i. \quad (\text{Д6.6})$$

Из (Д6.6) с учетом преобразований (Д6.3) и (Д6.5)

$$F_j = F^i g_{ij}; \quad F^j = F_i g^{ij}; \quad \tilde{F}_j = F^j \sqrt{g_{jj}}. \quad (\text{Д6.7})$$

Поэтому и координатный вектор $\vec{r}$ точки M , проведенный к ней из начала координат, можно записать как

$$\vec{r} = a^i \vec{e}_i = a_i \vec{e}^i = \tilde{a}_i \vec{b}_i. \quad (\text{Д6.8})$$

Произвольный тензор второго ранга $\vec{\sigma}$ в основном, взаимном и „физическом” базисах определяется как:

$$\vec{\sigma} = \sigma^{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = \sigma_{ij} \vec{e}^i \vec{e}^j = \tilde{\sigma}_{ij} \vec{b}_i \vec{b}_j, \quad (\text{Д6.9})$$

где σ_{ij}, σ^{ij} – компоненты тензора $\vec{\sigma}$ (строго говоря, компоненты $\tilde{\sigma}_{ij}$ не создают тензор, поскольку не подчиняются правилам перерасчета тензора при вращении системы координат). Из (Д6.9) с учетом преобразований (Д6.3) и (Д6.5) получим (под радикалом здесь не суммировать):

$$\sigma^{ij} = \sigma_{mn} g^{im} g^{jn}; \quad \sigma_{ij} = \sigma^{mn} g_{im} g_{jn}; \quad \tilde{\sigma}_{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{ii}} / \sqrt{g^{jj}} = \sigma_{mn} g^{im} g^{jn} \sqrt{g_{ii}} / \sqrt{g^{jj}}. \quad (\text{Д6.10})$$

По определению, квадрат линейного элемента $ds^2 = d\vec{a} \cdot d\vec{a} = da^i \vec{e}_i \cdot da_j \vec{e}^j = g_{ij} da^i da^j = g^{ij} da_i da_j$. Еще одна характеристика:

$$\sqrt{g} = \sqrt{g_{11} g_{22} g_{33}} = \sqrt{\det |g_{ij}|} = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) = \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2). \quad (\text{Д6.11})$$

В частности, для ДСК $\det |g_{ij}| = 1$.

Д6.2.2. Тензор деформаций Грина-Лагранжа

Обозначим начальную конфигурацию тела как C_0 с координатным вектором $\vec{R} = \vec{r}_0$ в точке M^0 , а текущую – C с координатным вектором $\vec{r}$ в точке M^t . В соответствии с (Д6.1) в начальном состоянии:

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{R}}{\partial a^i}; \quad \vec{e}^j = \frac{\partial \vec{R}}{\partial a_j}; \quad d\vec{R} = da^i \vec{e}_i = da_j \vec{e}^j. \quad (\text{Д6.12})$$

В текущем состоянии введем локальный „вмороженный” сдеформированный базис

$$\vec{G}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial a^i}; \quad \vec{G}^j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial a_j} = G^{ji} \vec{G}_i; \quad d\vec{r} = da^i \vec{G}_i = da_j \vec{G}^j \quad (\text{Д6.13})$$

(об G^{ji} – ниже). Тогда квадраты длины линейного элемента, который связывает две бесконечно близкие материальные точки, до и после деформирования, являются соответственно:

$$dR^2 = d\vec{R} \cdot d\vec{R} = da^i \vec{e}_i \cdot da_j \vec{e}^j = da^i da_j \delta_i^j = da^i da_i = da^i g_{ij} da^j = g_{ij} da^i da^j; \quad (\text{Д6.14})$$

$$dr^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r} = da^i \vec{G}_i \cdot da_j \vec{G}^j = G_i^j da^i da_j = G_{ij} da^i da^j = G^{ij} da_i da_j. \quad (\text{Д6.15})$$

По определению, инвариант

$$dr^2 - dR^2 \equiv 2\varepsilon_{ij} da^i da^j \quad (\text{Д6.16})$$

является мерой деформации в точке тела относительно *начальной* конфигурации, где ε_{ij} – компоненты тензора деформаций (деформацию можно рассматривать и относительно любой другой конфигурации, но для **TL**-формулировки нужна деформация именно относительно начальной конфигурации).

Если во всем теле $dr^2 - dR^2 = 0$, то движение тела – *абсолютно жесткое*. Иначе тело находится в *сдеформированном состоянии*.

Подставим (Д6.14) и (Д6.15) в (Д6.16):

$$2\varepsilon_{ij}da^ida^j = G_{ij}da^ida^j - g_{ij}da^ida^j = (G_{ij} - g_{ij})da^ida^j. \quad (Д6.17)$$

Из (Д6.17) следует, что *текущие* компоненты симметричного тензора деформации Грина–Лагранжа (относительно *начальной* конфигурации):

$$\varepsilon_{ij} = 0.5(G_{ij} - g_{ij}), \quad (Д6.18-а)$$

или через компоненты вектора перемещений:

$$\varepsilon_{ij} = 0.5(\nabla_j U_i + \nabla_i U_j + \nabla_i U_k \nabla_j U^k); \quad i, j, k=1, 2, 3. \quad (Д6.19)$$

где обозначено

$$\nabla_i U_k = \frac{\partial U_k}{\partial a^i} - U_m \Gamma_{ik}^m; \quad \nabla_j U^k = \frac{\partial U^k}{\partial a^j} + U^m \Gamma_{jm}^k; \quad (Д6.20)$$

Γ_{ij}^m – символы Кристоффеля второго рода, которые симметричны по нижним индексам и являются компонентами разложения $\partial \vec{e}_j / \partial a^i$ по исходному базису $\vec{e}_m$, выражаются формулой

$$\Gamma_{mi}^j = \Gamma_{im}^j = \frac{1}{2} g^{jn} \left(\frac{\partial g_{mn}}{\partial a^i} + \frac{\partial g_{in}}{\partial a^m} - \frac{\partial g_{mi}}{\partial a^n} \right). \quad (Д6.21)$$

Первый вектор из (Д6.13)

$$\vec{G}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial a^i} = \frac{\partial x^j}{\partial a^i} \vec{e}_j = \frac{\partial (\vec{a} + \vec{U})}{\partial a^i} = \vec{e}_i + \frac{\partial \vec{U}}{\partial a^i} = \frac{\partial (a^j + U^j)}{\partial a^i} \vec{e}_j = (\delta_i^j + \nabla_i U^j) \vec{e}_j = F_i^j \vec{e}_j, \quad (Д6.22)$$

называется *градиентом деформаций* и определяет сдеформированные координатные оси локальной конвекционной („вмороженной”) системы координат с базисом $\vec{G}_i$.

Компоненты тензора меры деформации Коши–Грина

$$G_{ij} = X_i^k X_j^k = \frac{\partial x^k}{\partial a^i} \frac{\partial x^k}{\partial a^j}, \quad \text{где } X_i^k = \frac{\partial x^k}{\partial a^i} = (\delta_i^k + \nabla_i U^k), \quad (Д6.23)$$

$x^i = x^i(a^j, t)$ – текущие координаты точки; $x^i(a^j, 0) = a^i$ – начальные координаты точки; $i, j=1, 2, 3$.

Представим (Д6.18-а) в матричном виде:

$$[\varepsilon] = 0.5([C] - [g]), \quad (Д6.18-б)$$

где матрицы

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}; & \varepsilon_{12}; & \varepsilon_{13} \\ & \varepsilon_{22}; & \varepsilon_{23} \\ \text{symm} & & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}; \quad [g] = \begin{bmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{bmatrix}; \quad (Д6.24)$$

$$[C] = [G]^T [G]. \quad (Д6.25)$$

Матрица $[G]$ отображает градиенты деформаций (Д6.20), поэтому имеет такое наполнение (обозначено $h_{ij} = \partial U_i / \partial a^j$):

$$[G] = \begin{bmatrix} 1+h_{11}; & h_{12}; & h_{13} \\ h_{21}; & 1+h_{22}; & h_{23} \\ h_{31}; & h_{32}; & 1+h_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}; & s_{12}; & s_{13} \\ s_{21}; & s_{22}; & s_{23} \\ s_{31}; & s_{32}; & s_{33} \end{bmatrix}. \quad (Д6.26)$$

Тогда матрица

$$[C] = [G]^T [G] = \begin{bmatrix} c_{11}; & c_{21}; & c_{31} \\ & c_{22}; & c_{32} \\ \text{symm} & & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11}; & s_{21}; & s_{31} \\ s_{12}; & s_{22}; & s_{32} \\ s_{13}; & s_{23}; & s_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11}; & s_{12}; & s_{13} \\ s_{21}; & s_{22}; & s_{23} \\ s_{31}; & s_{32}; & s_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (s_{11})^2 + (s_{21})^2 + (s_{31})^2; & s_{11}s_{12} + s_{21}s_{22} + s_{31}s_{32}; & s_{11}s_{13} + s_{21}s_{23} + s_{31}s_{33} \\ & (s_{12})^2 + (s_{22})^2 + (s_{32})^2; & s_{12}s_{13} + s_{22}s_{23} + s_{32}s_{33} \\ & \text{symm} & (s_{13})^2 + (s_{23})^2 + (s_{33})^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{Д6.27})$$

Поскольку фактически применяются компоненты $\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij}$, $i \neq j$, то с использованием компонент c_{ij} матрицы $[C]$ формула (Д6.18-а) приобретает вид:

$$\varepsilon_{ij} = 0.5(c_{ij} - g_{ij}), \quad i = j; \quad \gamma_{ij} = \gamma_{ji} = c_{ij}, \quad i \neq j; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (\text{Д6.18-в})$$

Примечание Д6.2. Для вычисления компонент ε_{ij} чаще используют именно формулы (Д6.18), которые в случае известных компонент G_{ij} имеют значительно меньше действий, чем формулы (Д6.19).

Д6.2.3. О мерах тензоров напряжений

При наличии геометрической нелинейности могут использоваться несколько мер (разновидностей) тензоров напряжений.

По определению Эйлера (1707... 1783 гг) и Коши (1789 ... 1857 гг), напряжение – это внутренняя сила, которая действует на элементарной площадке, отнесенная к ее площади при условии стремления этой площади к нулю.

Результирующий вектор напряжений на элементарной площадке dS_1 , которая перпендикулярна $\vec{e}_1$, обозначим как $\vec{\sigma}^1 dS_1$, где $\vec{\sigma}^1$ – вектор напряжений на единице площади dS_1 . Аналогично вводятся векторы напряжений $\vec{\sigma}^2$ и $\vec{\sigma}^3$. Компоненты векторов $\vec{\sigma}^i$ в основном базисе $\vec{e}_j$, а именно σ^{ij} , называются контравариантными компонентами симметричного *тензора напряжений Эйлера-Коши (Эйлера, Коши)*:

$$\vec{\sigma}^i = \sigma^{ij} \vec{e}_j. \quad (\text{Д6.28})$$

То есть этот тензор содержит такие напряжения: нормальные к элементарным площадкам σ^{ij} ; $i = j = 1, 2, 3$, и касательные к ним $\sigma^{ij} = \sigma^{ji}$; $i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$. Первый индекс указывает, перпендикулярно к какой оси $\vec{e}_i$ расположена элементарная площадка, а второй – направление напряжения, т.е. вдоль какой оси $\vec{e}_j$ направлена компонента тензора напряжений. Подчеркнем, что не всегда направления определяет исходный *глобальный* базис $\vec{e}_i$. Есть случаи, когда направление компонент напряжений определяет исходный *локальный* базис, например, в пластинах и оболочках исходный вектор $\vec{e}_3$ обычно перпендикулярен центральной поверхности; в стрелках – параллелен продольной оси.

В каждой точке наклонной площадки dS , внешняя нормаль к которой $\vec{\nu}$ имеет компоненты ν_i , результирующий вектор напряжений

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}^i \nu_i = \sigma^{ij} \nu_i \vec{e}_j. \quad (\text{Д6.29})$$

Компоненты векторов $\vec{\sigma}^i$ в *сдеформированном* базисе $\vec{G}_j$, а именно $\tilde{\sigma}^{ij}$, называются (контравариантными) компонентами симметричного *второго тензора напряжений Пиола (1836)–Кирхгофа (1850)*:

$$\vec{\sigma}^i = \tilde{\sigma}^{ij} \vec{G}_j. \quad (\text{Д6.30})$$

В каждой точке наклонной площадки dS , внешняя нормаль к которой $\vec{\nu}$ имеет компоненты ν_i , результирующий вектор напряжений

$$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}^i \nu_i = \tilde{\sigma}^{ij} \nu_i \vec{G}_j. \quad (\text{Д6.31})$$

Но, поскольку при деформировании базис $\vec{G}_j$ обычно не является ортогональным, то $\vec{\sigma}$ с его компонентами применяют лишь как некоторую расчетную (вспомогательную) дефиницию. Поскольку в разных точках сдеформированного тела направления локального сде-

формированного базиса $\vec{G}_i$ относительно осей $\vec{e}_i$ будут разными, то результаты расчетов есть смысл представлять относительно осей $\vec{e}_i$, т.е. относительно известных начальных направлений. Именно поэтому перед представлением результатов расчетов, а именно напряжений, нужно перейти к тензору Эйлера-Коши.

Но это еще не все. Поскольку, как об этом говорилось в Разделе Д6.1, на момент вычисления компонент САУ текущая геометрия тела не определена, то приходится использовать опорную конфигурацию. В случае **TL**-формулировки, которую мы рассматриваем, опорной конфигурацией является *исходная* конфигурация.

Симметричный *второй тензор напряжений Пиола-Кирхгофа* $(\varpi^{ij})_0$ на поверхности начальной конфигурации $(dS)_0$ создает результирующий вектор напряжений

$$(\vec{\varpi})_0 = (\varpi^{ij})_0 (v_i)_0 \vec{G}_j, \quad (\text{Д6.32})$$

причем рассматривается именно та поверхность $(dS)_0$, которая превратилась при деформировании в поверхность dS .

Компоненты векторов $(\vec{T}^i)_0$ в *основном* базисе $\vec{e}_j$, а именно $(T^{ij})_0$, называются (контравариантными) компонентами несимметричного *первого тензора напряжений Пиола-Кирхгофа*:

$$(\vec{T}^i)_0 = (T^{ij})_0 \vec{e}_j. \quad (\text{Д6.33})$$

Его определяют путем проектирования компонент тензора Эйлера-Коши к *начальной* геометрии с *полным* учетом изменений элементарной площадки: как ее размера, так и ориентации. Поэтому в каждой точке поверхности $(dS)_0$ он создает результирующий вектор напряжений

$$(\vec{T})_0 = (T^{ij})_0 (v_i)_0 \vec{e}_j. \quad (\text{Д6.34})$$

В дальнейшем 1-й $(T^{ij})_0$ и 2-й $(\varpi^{ij})_0$ тензоры напряжений Пиола-Кирхгофа, для краткости, будем называть аббревиатурами ТН1ПК и ТН2ПК соответственно.

Есть и другие тензоры напряжений, но для **TL**-формулировки они не применяются, поэтому здесь не рассматриваются.

Между всеми видами тензоров напряжений существуют однозначные преобразования.

Примечание Д6.3. В литературе довольно часто индексы, которые обозначают „привязку” величины к *этапу нагружения*, указывают *левым верхним* индексом, а к *базовой* конфигурации – *левым нижним* индексом. Например, ${}^{n+1}_0 P$ – некоторая величина P , которая определена для $(n+1)$ -го этапа на основе исходной конфигурации. Но, когда таких меток много, то с непривычки формулы читаются тяжело. Именно поэтому в дальнейшем тексте мы их применять не будем.

Д6.2.4. Соотношение между компонентами первого и второго тензоров напряжений Пиола-Кирхгофа в начальной конфигурации

Соотношение между компонентами $(\vec{T})_0$ и $(\vec{\varpi})_0$ получим из условия $(\vec{T})_0 = (\vec{\varpi})_0$. С учетом (Д6.32) и (Д6.34):

$$(T^{ij})_0 (v_i)_0 \vec{e}_j = (\varpi^{ij})_0 (v_i)_0 \vec{G}_j. \quad (\text{Д6.35})$$

Согласно (Д6.22) $\vec{G}_j = \partial \vec{r} / \partial a^j = (\delta_j^m + \nabla_j U^m) \vec{e}_m = \nabla_j x^m \vec{e}_m = X_j^m \vec{e}_m$. Поэтому

$$(T^{ij})_0 (v_i)_0 \vec{e}_j = (\varpi^{ij})_0 (v_i)_0 X_j^m \vec{e}_m. \quad (\text{Д6.36})$$

Заменим в левой части последней формулы индекс j на индекс m :

$$(T^{im})_0 (v_i)_0 \vec{e}_m = (\varpi^{ij})_0 (v_i)_0 X_j^m \vec{e}_m \quad \text{или} \quad ((T^{im})_0 - (\varpi^{ij})_0 X_j^m) (v_i)_0 \vec{e}_m = 0. \quad (\text{Д6.37})$$

Это равенство является справедливым при любых $(\nu_i)_0 \bar{e}_m$. Поэтому окончательно получим, что соотношение между компонентами тензоров $(\vec{T})_0$ и $(\vec{\sigma})_0$:

$$(T^{im})_0 = (\sigma^{ij})_0 X_j^m. \quad (\text{Д6.38-а})$$

Для получения соотношения между компонентами тензоров $(\vec{T})_0$ и $(\vec{\sigma})_0$ с компонентами тензора Эйлера-Коши $\vec{\sigma}$ необходимо сначала рассмотреть некоторые другие вопросы.

Д6.2.5. Символы Леви-Чивита

Учтем, что результатом векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является новый вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который перпендикулярен до обоих векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и имеет модуль $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$, где α является углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поэтому $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$. Еще известно, что $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. Поэтому $\vec{a}_m \times \vec{a}_n = (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 - \vec{a}_2 \times \vec{a}_1) + (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3 - \vec{a}_3 \times \vec{a}_2) + (\vec{a}_3 \times \vec{a}_1 - \vec{a}_1 \times \vec{a}_3)$ при $m, n = 1, 2, 3$. Кроме того, для трех ортогональных векторов основного базиса: $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) = \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = \sqrt{g}$; $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) = -\sqrt{g}$; $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) = \vec{e}_2 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) = \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) = \vec{e}_3 \cdot (\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) = 0$.

Эти и аналогичные факты обычно описывают с помощью символов Леви-Чивита $E^{ijk} = E_{ijk}$ (тензор эти компоненты не создают):

$$E_{ijk} = \begin{cases} 1; & \text{прямая круговая перестановка значений индексов;} \\ -1; & \text{обратная круговая перестановка значений индексов;} \\ 0; & \text{наличие двух или трех одинаковых индексов.} \end{cases} \quad (\text{Д6.39})$$

Тогда вместо многих выражений имеем лишь одно:

$$\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k) = E_{ijk} \sqrt{g} = \mathcal{E}_{ijk}. \quad (\text{Д6.40})$$

Если базис декартовый, то $\sqrt{g} = 1$ и $\mathcal{E}_{ijk} = E_{ijk}$.

В общем случае, если некоторая матрица A_n^k является матрицей перехода от одной координатной системы к другой, то

$$E_{qmn} \det \|A\| = E_{ijk} A_q^i A_m^j A_n^k. \quad (\text{Д6.41})$$

В качестве компонент матрицы A_n^k можно взять, согласно (Д6.22), компоненты $\partial x^k / \partial a^n = X_n^k$. Тогда в соответствии с (Д6.41)

$$E_{qmn} \det \left\| \frac{\partial x^k}{\partial a^n} \right\| = E_{qmn} \det \|G_{kn}\| = E_{qmn} \sqrt{G} = E_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial a^q} \frac{\partial x^j}{\partial a^m} \frac{\partial x^k}{\partial a^n} = E_{ijk} X_q^i X_m^j X_n^k. \quad (\text{Д6.42})$$

Здесь обозначено

$$\sqrt{G} = \det \|G_{kn}\|. \quad (\text{Д6.43})$$

Д6.2.6. Изменение элементарного объема при деформировании

Сначала отметим, что, согласно (Д6.13) и, соответственно, из (Д6.14) и (Д6.22):

$$d\vec{R} = \vec{e}_i da^i = \vec{e}_1 da^1 + \vec{e}_2 da^2 + \vec{e}_3 da^3, \quad (\text{Д6.44})$$

$$d\vec{r} = \vec{G}_i da^i = \vec{G}_1 da^1 + \vec{G}_2 da^2 + \vec{G}_3 da^3, \quad (\text{Д6.45})$$

т.е. отдельные векторы $\vec{e}_j da^j$ определяют длины сторон элементарного параллелепипеда до его деформирования, а $\vec{G}_i da^i$ – после его деформирования. Кроме того, для трех ортогональных векторов основного и совместного базиса:

$$\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \vec{e}^k \sqrt{g}; \quad i \neq j \neq k \neq i = 1, 2, 3. \quad (\text{Д6.46})$$

Согласно с (Д6.46) и соотношением $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \delta_i^j$ (см. Раздел Д6.2.1) начальная величина элементарного объема (см. также (Д6.11)):

$$(d\Omega)_0 = (\vec{e}_1 da^1) \cdot ((\vec{e}_2 da^2) \times (\vec{e}_3 da^3)) = \vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) da^1 da^2 da^3 = \sqrt{g} da^1 da^2 da^3. \quad (\text{Д6.47})$$

После деформирования элементарного объема, с учетом Раздела Д6.2.4, формулы (Д6.46) и $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \delta_i^j$:

$$\begin{aligned} d\Omega &= (\vec{G}_1 da^1) \cdot ((\vec{G}_2 da^2) \times (\vec{G}_3 da^3)) = \vec{G}_1 \cdot (\vec{G}_2 \times \vec{G}_3) da^1 da^2 da^3 = \\ &= \frac{\partial x^m}{\partial a^1} \vec{e}_m \cdot \left(\frac{\partial x^n}{\partial a^2} \vec{e}_n \times \frac{\partial x^k}{\partial a^3} \vec{e}_k \right) da^1 da^2 da^3 = \frac{\partial x^m}{\partial a^1} \vec{e}_m \cdot \left[\left(\frac{\partial x^1}{\partial a^2} \frac{\partial x^2}{\partial a^3} - \frac{\partial x^2}{\partial a^2} \frac{\partial x^1}{\partial a^3} \right) (\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial x^2}{\partial a^2} \frac{\partial x^3}{\partial a^3} - \frac{\partial x^3}{\partial a^2} \frac{\partial x^2}{\partial a^3} \right) (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) + \left(\frac{\partial x^1}{\partial a^2} \frac{\partial x^3}{\partial a^3} - \frac{\partial x^3}{\partial a^2} \frac{\partial x^1}{\partial a^3} \right) (\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) \right] da^1 da^2 da^3 = \\ &= \frac{\partial x^m}{\partial a^1} \vec{e}_m \cdot \left[\left(\frac{\partial x^1}{\partial a^2} \frac{\partial x^2}{\partial a^3} - \frac{\partial x^2}{\partial a^2} \frac{\partial x^1}{\partial a^3} \right) \sqrt{g} \vec{e}^3 + \left(\frac{\partial x^2}{\partial a^2} \frac{\partial x^3}{\partial a^3} - \frac{\partial x^3}{\partial a^2} \frac{\partial x^2}{\partial a^3} \right) \sqrt{g} \vec{e}^1 + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial x^1}{\partial a^2} \frac{\partial x^3}{\partial a^3} - \frac{\partial x^3}{\partial a^2} \frac{\partial x^1}{\partial a^3} \right) \sqrt{g} \vec{e}^2 \right] da^1 da^2 da^3 = \\ &= \left[\frac{\partial x^3}{\partial a^1} \vec{e}_3 \cdot \left(\frac{\partial x^1}{\partial a^2} \frac{\partial x^2}{\partial a^3} - \frac{\partial x^2}{\partial a^2} \frac{\partial x^1}{\partial a^3} \right) \vec{e}^3 + \frac{\partial x^1}{\partial a^1} \vec{e}_1 \cdot \left(\frac{\partial x^2}{\partial a^2} \frac{\partial x^3}{\partial a^3} - \frac{\partial x^3}{\partial a^2} \frac{\partial x^2}{\partial a^3} \right) \vec{e}^1 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial x^2}{\partial a^1} \vec{e}_2 \cdot \left(\frac{\partial x^1}{\partial a^2} \frac{\partial x^3}{\partial a^3} - \frac{\partial x^3}{\partial a^2} \frac{\partial x^1}{\partial a^3} \right) \vec{e}^2 \right] \sqrt{g} da^1 da^2 da^3 = \\ &= \left[\frac{\partial x^3}{\partial a^1} \left(\frac{\partial x^1}{\partial a^2} \frac{\partial x^2}{\partial a^3} - \frac{\partial x^2}{\partial a^2} \frac{\partial x^1}{\partial a^3} \right) + \frac{\partial x^1}{\partial a^1} \left(\frac{\partial x^2}{\partial a^2} \frac{\partial x^3}{\partial a^3} - \frac{\partial x^3}{\partial a^2} \frac{\partial x^2}{\partial a^3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial x^2}{\partial a^1} \left(\frac{\partial x^1}{\partial a^2} \frac{\partial x^3}{\partial a^3} - \frac{\partial x^3}{\partial a^2} \frac{\partial x^1}{\partial a^3} \right) \right] \sqrt{g} da^1 da^2 da^3 = \det \| G_{ij} \| \sqrt{g} da^1 da^2 da^3. \quad (\text{Д6.48}) \end{aligned}$$

Учтено, что выражение в квадратных скобках является выражением для детерминанта матрицы, собранной из компонент тензора G_{ij} .

Поэтому, с учетом (Д6.43) и (Д6.47)

$$d\Omega = \sqrt{G} \sqrt{g} da^1 da^2 da^3 = \sqrt{G} (d\Omega)_0. \quad (\text{Д6.49})$$

Итак, величина $\sqrt{G}$ определяет масштаб в изменении элементарного объема.

Д6.2.7. Следствие из закона сохранения массы тела

В соответствии с законом сохранения массы, масса m объема при его деформировании является неизменной, т.е. для любого объема

$$m = \int_{\Omega} \bar{\rho}(\vec{x}, t) d\Omega = \int_{\Omega_0} \bar{\rho}(\vec{a}, t_0) (d\Omega)_0 = m_0 = \text{const}, \quad (\text{Д6.50})$$

где $\bar{\rho}$ – плотность материала. Обозначим $\bar{\rho}_0 = \bar{\rho}(\vec{a}, t_0)$, $\bar{\rho} = \bar{\rho}(\vec{x}, t)$. Поскольку в (Д6.50) объем является произвольным, то и для элементарного объема:

$$dm = \bar{\rho} d\Omega = \bar{\rho}_0 (d\Omega)_0 = (dm)_0 = \text{const}. \quad (\text{Д6.51})$$

Учитывая (Д6.49), получим, что

$$\bar{\rho} \sqrt{G} = \bar{\rho}_0, \quad \text{или} \quad \bar{\rho}_0 / \bar{\rho} = \sqrt{G}. \quad (\text{Д6.52})$$

Итак, величина $\sqrt{G}$ еще определяет пропорцию в изменении плотности материала при условии сохранения массы тела.

Д6.2.8. Формула Нансона

Эта формула связывает площади и ориентации элементарных поверхностей: начальной $(dS)_0$ и сдеформированной dS (на рис.Д6.1 поверхности ABC по левую сторону и по правую сторону соответственно).

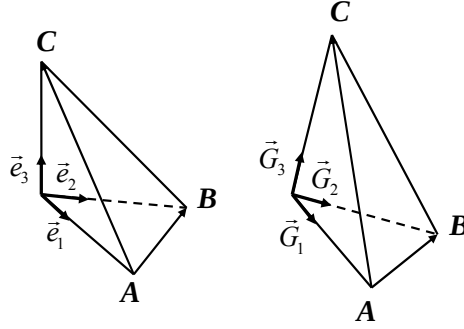


Рис.Д6.1. К выводу формулы Нансона

Сначала рассмотрим элементарную площадку ABC с площадью $(dS)_0$ (см. рис.Д6.1, по левую сторону). Рассмотрим два вектора, которые принадлежат этой площадке и выходят из одного угла, например, из A :

$$\overrightarrow{AB} = (d\vec{a})_{AB} = \vec{e}_1(da^1)_{AB} + \vec{e}_2(da^2)_{AB} + \vec{e}_3(da^3)_{AB} = \vec{e}_j(da^j)_{AB};$$

$$\overrightarrow{AC} = (d\vec{a})_{AC} = \vec{e}_1(da^1)_{AC} + \vec{e}_2(da^2)_{AC} + \vec{e}_3(da^3)_{AC} = \vec{e}_k(da^k)_{AC}; \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (Д6.53)$$

Известно, что векторное произведение таких векторов определяет удвоенную площадь площадки ABC , а также направление нормали к ней:

$$(d\vec{a})_{AB} \times (d\vec{a})_{AC} = 2(\vec{v})_0(dS)_0. \quad (Д6.54)$$

Вектор $(\vec{v})_0$ внешней нормали к поверхности площадки ABC в точке A определим как

$$(\vec{v})_0 = (v_1)_0 \vec{e}^1 + (v_2)_0 \vec{e}^2 + (v_3)_0 \vec{e}^3 = (v_n)_0 \vec{e}^n; \quad n = 1, 2, 3. \quad (Д6.55)$$

Если (Д6.55) скалярным образом умножить на $\vec{e}_i$, то, с учетом $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^n = \vec{e}^n \cdot \vec{e}_i = \delta_i^n$, получим:

$$\vec{e}_i \cdot (\vec{v})_0 = \vec{e}_i \cdot (v_n)_0 \vec{e}^n = (v_i)_0. \quad (Д6.56)$$

Учитывая изложенное в Разделе Д6.2.5 и (Д6.53), запишем, что

$$\begin{aligned} \vec{e}_i \cdot ((d\vec{a})_{AB} \times (d\vec{a})_{AC}) &= \vec{e}_i \cdot \left((\vec{e}_1(da^1)_{AB} + \vec{e}_2(da^2)_{AB} + \vec{e}_3(da^3)_{AB}) \times \right. \\ &\times \left. (\vec{e}_1(da^1)_{AC} + \vec{e}_2(da^2)_{AC} + \vec{e}_3(da^3)_{AC}) \right) = \vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k)(da^j)_{AB}(da^k)_{AC} = \mathfrak{E}_{ijk}(da^j)_{AB}(da^k)_{AC}. \end{aligned} \quad (Д6.57)$$

Итак, согласно (Д6.54), (Д6.56) и (Д6.57):

$$\mathfrak{E}_{ijk}(da^j)_{AB}(da^k)_{AC} = \vec{e}_i \cdot 2(\vec{v})_0(dS)_0 = 2(v_i)_0(dS)_0 = 2(dS_i)_0 \quad (Д6.58)$$

или, с учетом (Д6.40) при $E_{123} = E_{231} = E_{312} = 1$, т.е. при $\mathfrak{E}_{123} = \mathfrak{E}_{231} = \mathfrak{E}_{312} = \sqrt{g}$:

$$\begin{aligned} 2(v_1)_0(dS)_0 &= \sqrt{g}(da^2)_{AB}(da^3)_{AC}; \quad 2(v_2)_0(dS)_0 = \sqrt{g}(da^3)_{AB}(da^1)_{AC}; \\ 2(v_3)_0(dS)_0 &= \sqrt{g}(da^1)_{AB}(da^2)_{AC}. \end{aligned} \quad (Д6.59)$$

Также рассмотрим сдеформированную элементарную площадку ABC (см. рис.Д6.1, по правую сторону) с площадью dS . После деформирования векторы $(d\vec{a})_{AB}$ и $(d\vec{a})_{AC}$ превратятся на векторы $(d\vec{x})_{AB}$ и $(d\vec{x})_{AC}$. Можно записать аналогичные (Д6.54) ... (Д6.59) выражения, в частности, аналогично (Д6.54), (Д6.55), (Д6.58) и (Д6.59):

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (d\vec{x})_{AB} \times (d\vec{x})_{AC} = 2\vec{v}dS; \quad (Д6.60)$$

$$\vec{v} = v_1\vec{e}^1 + v_2\vec{e}^2 + v_3\vec{e}^3 = v_n\vec{e}^n; \quad n = 1, 2, 3; \quad (Д6.61)$$

$$\mathfrak{E}_{ijk}(dx^j)_{AB}(dx^k)_{AC} = \vec{e}_i \cdot 2\vec{v}dS = 2v_idS = 2dS_i; \quad (Д6.62)$$

$$2v_1dS = \sqrt{g}(dx^2)_{AB}(dx^3)_{AC}; \quad 2v_2dS = \sqrt{g}(dx^3)_{AB}(dx^1)_{AC};$$

$$2\nu_3 dS = \sqrt{g}(dx^1)_{AB}(dx^2)_{AC}. \quad (Д6.63)$$

По определению

$$(dx^j)_{AB} = \frac{\partial x^j}{\partial a^m}(da^m)_{AB}; \quad (dx^k)_{AC} = \frac{\partial x^k}{\partial a^n}(da^n)_{AC}, \quad (Д6.64)$$

поэтому из (Д6.62)

$$2\nu_i dS = 2dS_i = \vec{e}_i \cdot 2\vec{\nu} dS = \mathfrak{D}_{ijk} \frac{\partial x^j}{\partial a^m} \frac{\partial x^k}{\partial a^n} (da^m)_{AB} (da^n)_{AC}. \quad (Д6.65)$$

Умножим это выражение на $\partial x^i / \partial a^q$:

$$2 \frac{\partial x^i}{\partial a^q} \nu_i dS = 2 \frac{\partial x^i}{\partial a^q} dS_i = \mathfrak{D}_{ijk} \frac{\partial x^i}{\partial a^q} \frac{\partial x^j}{\partial a^m} \frac{\partial x^k}{\partial a^n} (da^m)_{AB} (da^n)_{AC}. \quad (Д6.66)$$

Из (Д6.66) с учетом (Д6.42), (Д6.40) и (Д6.58):

$$2 \frac{\partial x^i}{\partial a^q} \nu_i dS = 2 \frac{\partial x^i}{\partial a^q} dS_i = \sqrt{G} \mathfrak{D}_{qmn} (da^m)_{AB} (da^n)_{AC} = 2\sqrt{G} (dS_q)_0 = 2\sqrt{G} (\nu_q)_0 (dS)_0. \quad (Д6.67)$$

Крайние выражения с (Д6.67) создают формулу Нансона. А именно, после учета, что в соответствии с (Д6.22) $\partial x^i / \partial a^q = (\delta_q^i + \nabla_q U^i) = X_q^i$, после сокращения на двойку, деления на $\sqrt{G}$ и очевидных замен индексов:

$$\frac{1}{\sqrt{G}} X_i^j \nu_j dS = (\nu_i)_0 (dS)_0; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (Д6.68-а)$$

Еще одна форма записи формулы Нансона – матричная. Создадим матрицу

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 + \nabla_1 U^1; & \nabla_2 U^1; & \nabla_3 U^1 \\ \nabla_1 U^2; & 1 + \nabla_2 U^2; & \nabla_3 U^2 \\ \nabla_1 U^3; & \nabla_2 U^3; & 1 + \nabla_3 U^3 \end{bmatrix}, \quad (Д6.69)$$

которая соответствует транспонированному выражению $\delta_i^j + \nabla_i U^j = X_i^j$ (см. формулы (Д6.68-а), (Д6.22) и (Д6.26)). Вместо (Д6.68-а) имеем формулу Нансона в матричной форме:

$$\frac{1}{\sqrt{G}} [G]^T \{\nu\} dS = \{(\nu)_0\} (dS)_0, \quad (Д6.68-б)$$

где обозначены векторы $\{\nu\} = \{\nu_1, \nu_2, \nu_3\}^T$ и $\{(\nu)_0\} = \{(\nu_1)_0, (\nu_2)_0, (\nu_3)_0\}^T$, которые определяют нормали к поверхностям dS и соответственно $(dS)_0$ относительно базиса $\vec{e}^i$.

Д6.2.9. Соотношения между компонентами первого и второго тензоров напряжений Пиола-Кирхгофа с компонентами тензора Эйлера-Коши

Согласно формулам (Д6.29), (Д6.32) и (Д6.35), на поверхностях dS и $(dS)_0$ тензоры $\vec{\sigma}$ и $(\vec{T})_0$ создают соответственно векторы внутренних усилий $d\vec{F} = \sigma^{ij} \nu_i \vec{G}_j dS$ и $(d\vec{F})_0 = (T^{ij})_0 (\nu_i)_0 \vec{G}_j (dS)_0$ с компонентами $dF^j = \sigma^{ij} \nu_i dS$ и $(dF^j)_0 = (T^{ij})_0 (\nu_i)_0 (dS)_0$.

Далее удобно использовать матричные обозначения. Введем матрицы с компонентами тензоров напряжений:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma^{11}; & \tau^{12}; & \tau^{13} \\ & \sigma^{22}; & \tau^{23} \\ symm & & \sigma^{33} \end{bmatrix}; \quad [T]_0 = \begin{bmatrix} (T^{11})_0; & (T^{12})_0; & (T^{13})_0 \\ (T^{21})_0; & (T^{22})_0; & (T^{23})_0 \\ (T^{31})_0; & (T^{32})_0; & (T^{33})_0 \end{bmatrix}. \quad (Д6.70)$$

Тогда выражения для $d\vec{F}$ и $(d\vec{F})_0$ будут иметь вид:

$$\{dF\} = \{dF^1, dF^2, dF^3\}^T = [\sigma] \{\nu\} dS; \quad \{(dF)_0\} = \{(dF^1)_0, (dF^2)_0, (dF^3)_0\}^T = [T]_0 \{(\nu)_0\} (dS)_0. \quad (Д6.71)$$

Поскольку ТН1ПК получено путем проектирования тензора Эйлера-Коши на исходную конфигурацию, то приравниваем компоненты этих векторов:

$$[\sigma]\{\nu\}dS = [T]_0\{(\nu)_0\}(dS)_0. \quad (Д6.72)$$

Исключим из (Д6.72) $\{(\nu)_0\}(dS)_0$ с помощью формулы Нансона (Д6.68-б):

$$[\sigma]\{\nu\}dS = [T]_0 \frac{1}{\sqrt{G}} [G]^T \{\nu\}dS. \quad (Д6.73)$$

Это равенство справедливо при любых $\{\nu\}dS$. Поэтому окончательно получим соотношения между компонентами матриц $[\sigma]$ и $[T]_0$:

$$[\sigma] = \frac{1}{\sqrt{G}} [T]_0 [G]^T \quad \text{или} \quad [T]_0 = \sqrt{G} [\sigma] ([G]^T)^{-1}. \quad (Д6.74-а)$$

В матричной форме соотношение (Д6.38-а) между компонентами тензоров $(\vec{T})_0$ и $(\vec{\sigma})_0$ будет иметь вид:

$$[T]_0 = [\sigma]_0 [G] \quad \text{или} \quad [\sigma]_0 = [T]_0 [G]^{-1}, \quad (Д6.38-б)$$

где введена матрица ТН2ПК

$$[\sigma]_0 = \begin{bmatrix} (\sigma^{11})_0; & (\sigma^{12})_0; & (\sigma^{13})_0 \\ & (\sigma^{22})_0; & (\sigma^{23})_0 \\ \text{symm} & & (\sigma^{33})_0 \end{bmatrix}. \quad (Д6.75)$$

Из (Д6.74-а) и (Д6.38-б) получим соотношение между матрицами $[\sigma]_0$ и $[\sigma]$:

$$[\sigma]_0 = \sqrt{G} [G]^{-1} [\sigma] ([G]^T)^{-1} \quad (Д6.76-а)$$

или, наоборот

$$[\sigma] = \frac{1}{\sqrt{G}} [G] [\sigma]_0 [G]^T. \quad (Д6.77-а)$$

Поскольку матрица $[\sigma]$ симметрична, то конгруэнтная ей матрица $[\sigma]_0$ тоже является симметричной, т.е. ТН2ПК действительно является симметричным тензором.

В компонентной форме выражения (Д6.76-а) и (Д6.77-а) соответственно:

$$(\sigma^{mn})_0 = \sqrt{G} (X_m^i)^{-1} (X_n^j)^{-1} \sigma^{ij}; \quad (Д6.76-б)$$

$$\sigma^{ij} = \frac{1}{\sqrt{G}} X_m^i X_n^j (\sigma^{mn})_0. \quad (Д6.77-б)$$

Еще один вариант записи этих выражений – через векторы-столбцы $\{\sigma\}$ и $\{\sigma\}_0$:

$$\{\sigma\}_0 = \sqrt{G} [V]^{-1} \{\sigma\}; \quad (Д6.76-в)$$

$$\{\sigma\} = \frac{1}{\sqrt{G}} [V] \{\sigma\}_0, \quad (Д6.77-в)$$

где матрица $[V]$ размером 6х6 состоит из комбинации компонент X_m^i .

Д6.3. Принцип возможных перемещений в текущей конфигурации

Д6.3.1. Законы движения и равновесия элементарного объема тела

Количество движения некоторого текущего (сдеформированного) объема Ω^* , каждая точка которого имеет скорость $\vec{V}$ и плотность материала $\bar{\rho}$, определяется как

$$\mathfrak{Z} = \int_{\Omega^*} \vec{V} \bar{\rho} d\Omega. \quad (Д6.78)$$

Уравнением количества движения (вторым законом Ньютона) называют уравнение

$$d\mathfrak{Z}/dt = \vec{R}, \quad (Д6.79)$$

где результирующая всех сил, действующих на объем

$$\vec{R} = \int_{\Omega^*} \vec{O} d\Omega + \int_{S^*} \vec{P} dS, \quad (Д6.80)$$

$\vec{O} = O^j \vec{G}_j$ и $\vec{P} = P^j \vec{G}_j$ – соответственно плотность объемных (массовых) и поверхностных сил; а векторы $\vec{G}_j$, как и ранее, определяют сдеформированный базис.

С поверхностными силами связывают компоненты тензора напряжений, действующих в той же точке поверхности (естественные граничные условия):

$$\vec{P} = \vec{\sigma} \cdot \vec{v}|_{S^*}, \quad (Д6.81)$$

где $\vec{v}$ – внешняя нормаль к точке поверхности тела. Отметим, что выражение $\vec{\sigma} \cdot \vec{v}$ означает свертку тензора с вектором, которая имеет результатом вектор.

Применим уравнение Остроградского-Гаусса:

$$\int_{S^*} \vec{\sigma} \cdot \vec{v} dS = \int_{\Omega^*} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} d\Omega, \quad (Д6.82)$$

где $\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} = \text{div}(\vec{\sigma})$ является дивергенцией тензора второго ранга $\vec{\sigma}$, причем вектор-оператор ковариантного дифференцирования $\vec{\nabla} = \vec{e}^i \nabla_i$.

Считаем, что все рассматриваемые физические величины в теле непрерывны, а также выполняется закон сохранения массы, т.е. $d(\bar{\rho} d\Omega)/dt = 0$. Тогда с использованием (Д6.78) для левой части (Д6.79) можно записать, что:

$$d\mathfrak{Z}/dt = \int_{\Omega^*} \frac{d\vec{V}}{dt} \bar{\rho} d\Omega = \int_{\Omega^*} \vec{V} \bar{\rho} d\Omega = \int_{\Omega^*} \vec{U} \bar{\rho} d\Omega, \quad (Д6.83)$$

где $\vec{V} = d\vec{V}/dt = d^2\vec{U}/dt^2 = \vec{\ddot{U}}$ – вектор ускорения. Теперь уравнение (Д6.79):

$$\int_{\Omega^*} \bar{\rho} \vec{\ddot{U}} d\Omega = \int_{\Omega^*} \vec{O} d\Omega + \int_{\Omega^*} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} d\Omega \quad (Д6.84)$$

или в „собранном” виде:

$$\int_{\Omega^*} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \vec{O} - \bar{\rho} \vec{\ddot{U}}) d\Omega = 0. \quad (Д6.85)$$

Поскольку выражение (Д6.85) должно выполняться для любого объема Ω^* , то выражение под интегралом должно равняться нулю (основная лемма механики), т.е. уравнение движения элементарного объема тела имеет вид:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \vec{O} = \bar{\rho} \vec{\ddot{U}}. \quad (Д6.86)$$

Если ускорение отсутствует или им можно пренебречь, то уравнение движения (Д6.86) превращается в уравнение равновесия элементарного объема тела:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \vec{O} = 0. \quad (Д6.87)$$

Д6.3.2. Принцип (начало) возможных перемещений (в текущей конфигурации)

Возьмем уравнение равновесия (Д6.87) и скалярным образом умножим его на вектор вариации перемещений $\delta\vec{U}$:

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \vec{O}) \cdot \delta\vec{U} = 0. \quad (Д6.88)$$

После интегрирования во всем объеме тела:

$$\int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} + \vec{O}) \cdot \delta\vec{U} d\Omega = 0. \quad (Д6.89)$$

По правилам варьирования $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \delta\vec{U}) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}) \cdot \delta\vec{U} + \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{U})$, поэтому

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}) \cdot \delta\vec{U} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \delta\vec{U}) - \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{U}). \quad (Д6.90)$$

После подстановки (Д6.90) в (Д6.89) получаем выражение:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \delta\vec{U}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \delta\vec{U}) d\Omega + \int_{\Omega} \vec{O} \cdot \delta\vec{U} d\Omega = 0. \quad (Д6.91)$$

Согласно теореме Остроградского-Гаусса первый (объемный) интеграл из (Д6.91) равен (точное соотношение) интегралу по поверхности этого объема:

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \delta \vec{U}) d\Omega = \int_S (\vec{\sigma} \cdot \vec{\nu}) \cdot \delta \vec{U} dS. \quad (\text{Д6.92-а})$$

Согласно естественным граничным условиям (Д6.81), а именно $\vec{P} = \vec{\sigma} \cdot \vec{\nu}|_{S_p}$, на поверхности S_p задана силовая нагрузка $\vec{P}$. Другая часть поверхности тела $S \setminus S_p$ свободна от нагрузок, поэтому $\vec{\sigma} \cdot \vec{\nu}|_{S \setminus S_p} = 0$ и $\int_{S \setminus S_p} \vec{\sigma} \cdot \vec{\nu} \cdot \delta \vec{U} dS = 0$. Поэтому соотношение (Д6.92-а) можно изменить на

$$\int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\sigma} \cdot \delta \vec{U}) d\Omega = \int_{S_p} \vec{P} \cdot \delta \vec{U} dS. \quad (\text{Д6.92-б})$$

С использованием (Д6.92-б) выражение (Д6.91) запишется в виде:

$$\int_{S_p} \vec{P} \cdot \delta \vec{U} dS - \int_{\Omega} \vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{U}) d\Omega + \int_{\Omega} \vec{O} \cdot \delta \vec{U} d\Omega = 0. \quad (\text{Д6.93})$$

Поскольку тензор напряжений $\vec{\sigma}$ симметричен, то можем записать тождество:

$$\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{U}) = \vec{\sigma} \cdot 0.5(\vec{\nabla} \cdot \delta \vec{U} + \vec{\nabla} \cdot \delta \vec{U}) = \vec{\sigma} \cdot \delta [0.5(\vec{\nabla} \cdot \vec{U} + \vec{\nabla} \cdot \vec{U})] = \vec{\sigma} \cdot \delta \vec{\epsilon}, \quad (\text{Д6.94})$$

где введено обозначение (через компоненты):

$$\epsilon_{ij} = 0.5(\nabla_i U_j + \nabla_j U_i). \quad (\text{Д6.95})$$

Окончательно вместо (Д6.93) имеем (с заменой знаков на противоположные):

$$\delta \Psi = \int_{\Omega} \vec{\sigma} \cdot \delta \vec{\epsilon} d\Omega - \int_{\Omega} \vec{O} \cdot \delta \vec{U} d\Omega - \int_{S_p} \vec{P} \cdot \delta \vec{U} dS = 0. \quad (\text{Д6.96})$$

Обозначим:

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \vec{\sigma} \cdot \delta \vec{\epsilon} d\Omega; \quad \delta A = \int_{\Omega} \vec{O} \cdot \delta \vec{U} d\Omega + \int_{S_p} \vec{P} \cdot \delta \vec{U} dS. \quad (\text{Д6.97})$$

Здесь $\delta \Pi$ – работа напряжений на вариациях деформаций; δA – работа массовых и поверхностных усилий на вариациях перемещений (но не вариации работ).

Тогда (Д6.96) можно записать как

$$\delta \Psi = \delta(\Pi - A) = \delta \Pi - \delta A = 0 \quad \text{или} \quad \delta \Pi = \delta A. \quad (\text{Д6.98})$$

Выражения (Д6.96) и (Д6.98) отображают вариационный принцип возможных перемещений (Ж.Л. Лагранж, 1736 ... 1813 гг). Выражение $\delta(\Pi - A)$ определяет *полную виртуальную энергию* тела ($\Psi = \Pi - A$ является *полной энергией* тела). Заметим, что предполагается неизменность напряжений и усилий, когда варьируются перемещения.

Д6.4. Принцип возможных перемещений при TL-формулировке

Рассмотрим вопрос: как изменится выражение (Д6.96) принципа возможных перемещений при перерасчете от текущей конфигурации к начальной, которая применяется в TL-формулировке (см. Раздел Д6.1). Напомним, что начальную конфигурацию характеризуют три вектора основного базиса $\vec{e}_i$, координатные линии a^i , элемент площади $(dS)_0$, элемент объема $(d\Omega)_0$.

Д6.4.1. Выражение для работы напряжений на вариациях перемещений в TL-формулировке принципа возможных перемещений

Рассмотрим первый интеграл из функционала (Д6.96), приведем его к начальной конфигурации.

Сначала получим выражение для вариации деформации.

Используем симметричные матрицы $[\varepsilon]$ и $[g]$, созданные из компонент тензоров ε_{ij} и g_{ij} (метрического) соответственно – формулы (Д6.24). Тогда уравнение (Д6.29):

$$[\varepsilon] = 0.5([G]^T[G] - [g]), \quad (Д6.99)$$

где матрица $[G]$ соответствует (Д6.69).

Из этого выражения получим вариацию, учитывая, что $\delta[g] = 0$:

$$\delta[\varepsilon] = 0.5([\delta[G]^T][G] + [G]^T(\delta[G])). \quad (Д6.100)$$

Из компонент $\nabla_i(\delta x^m) = \nabla_i(a^m + \delta U^m)$ создадим матрицу

$$\delta[U] = \begin{bmatrix} \nabla_1(\delta x^1); & \nabla_2(\delta x^1); & \nabla_3(\delta x^1) \\ \nabla_1(\delta x^2); & \nabla_2(\delta x^2); & \nabla_3(\delta x^2) \\ \nabla_1(\delta x^3); & \nabla_2(\delta x^3); & \nabla_3(\delta x^3) \end{bmatrix}. \quad (Д6.101)$$

Можно легко получить, что

$$\delta[G] = (\delta[U])[G]; \quad \delta[G]^T = [G]^T(\delta[U]^T). \quad (Д6.102)$$

Поэтому (Д6.100) определиться как

$$\begin{aligned} \delta[\varepsilon] &= 0.5([G]^T(\delta[U]^T)[G] + [G]^T(\delta[U])[G]) = \\ &= [G]^T 0.5([\delta[U]^T] + (\delta[U]))[G] = [G]^T(\delta[\epsilon])[G], \end{aligned} \quad (Д6.103)$$

где обозначена матрица

$$\delta[\epsilon] = 0.5([\delta[U]^T] + (\delta[U])), \quad (Д6.104)$$

содержащая вариации от компонент тензора (Д6.95).

Теперь сначала запишем первый интеграл из функционала (Д6.96) с применением (Д6.77-а) и (Д6.49) как $\int_{\Omega} [\sigma] \delta[\epsilon] d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{G}} [G][\sigma]_0 [G]^T \delta[\epsilon] d\Omega$; потом, умножая подынтегральное выражение на выражение, которое ничто не изменяет, а именно на $[G][G]^{-1} = [I]$, и проводя замену $[G]^T(\delta[\epsilon])[G]$ согласно (Д6.103), получим, что:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\sigma] \delta[\epsilon] d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{G}} [G][\sigma]_0 [G]^T \delta[\epsilon] d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{G}} [G][\sigma]_0 ([G]^T \delta[\epsilon][G]) [G]^{-1} d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{G}} [G][\sigma]_0 \delta[\epsilon][G]^{-1} d\Omega = \int_{\Omega} [\sigma]_0 \delta[\epsilon] \frac{1}{\sqrt{G}} d\Omega = \int_{\Omega_0} [\sigma]_0 \delta[\epsilon] (d\Omega)_0. \end{aligned} \quad (Д6.105-а)$$

В компонентной форме:

$$\int_{\Omega} \sigma^{ij} \delta \epsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_0} (\sigma^{ij})_0 \delta \epsilon_{ij} (d\Omega)_0. \quad (Д6.105-б)$$

Итак, получили запись первого интеграла из функционала (Д6.96) в начальной конфигурации.

Д6.4.2. Выражение для объемного интеграла в TL-формулировке принципа возможных перемещений

Получим выражение для второго интеграла из (Д6.96), а именно для $\int_{\Omega} \vec{O} \cdot \delta \vec{U} d\Omega$, после преобразования в начальную конфигурацию. Компоненты δU^i вектора вариации перемещений $\delta \vec{U} = \delta U^i \vec{e}_i$ преобразовывать нет необходимости, поскольку они определяются относительно исходной (недеформированной) конфигурации. Вектор $\vec{O}$ объемной нагрузки запишем в виде

$$\vec{O} = \bar{\rho} \vec{F}, \quad (Д6.106)$$

где $\bar{\rho}$ является плотностью материала. Согласно следствию закона о сохранении массы тела (см. формулу (Д6.50)) $\int_{\Omega} \bar{\rho} d\Omega = \int_{\Omega_0} (\bar{\rho})_0 (d\Omega)_0$. Поэтому

$$\int_{\Omega} \vec{O} \cdot \delta \vec{U} d\Omega = \int_{\Omega_0} (\bar{\rho})_0 \vec{F} \cdot (\delta U^i \vec{e}_i) (d\Omega)_0. \quad (\text{Д6.107})$$

Осталось выразить вектор единичной массовой силы $\vec{F}$ в начальной конфигурации. Возможны две ситуации:

- сила $\vec{F}$ является „мертвой”, т.е. не изменяет своего положения и свою величину при наличии деформации в точке тела, поэтому $\vec{F} = (F^i)_0 \vec{e}_i$ и

$$\int_{\Omega} \vec{O} \cdot \delta \vec{U} d\Omega = \int_{\Omega_0} (\bar{\rho})_0 (F^i)_0 \vec{e}_i \cdot (\delta U^i \vec{e}_i) (d\Omega)_0; \quad (\text{Д6.108-а})$$

- сила $\vec{F}$ „следит” за деформацией точки тела (изменяет свое положение и свою величину при наличии деформации), поэтому $\vec{F} = F^i \vec{G}_i = F^i (\delta_i^j + \nabla_i U^j) \vec{e}_j = F^i X_i^j \vec{e}_j$ и

$$\int_{\Omega} \vec{O} \cdot \delta \vec{U} d\Omega = \int_{\Omega_0} (\bar{\rho})_0 F^i X_i^j \vec{e}_j \cdot (\delta U^i \vec{e}_i) (d\Omega)_0, \quad (\text{Д6.108-б})$$

причем величина F^i может изменяться как функция $\vec{x}$. Кстати, плотность материала также может быть функцией координат.

Поскольку второй вариант для твердых тел используется редко, далее его не рассматриваем.

С учетом (Д6.7) $(F^i)_0 \vec{e}_i \cdot (\delta U^i \vec{e}_i) = (F^i)_0 \delta U^i g_{ii} = ((F^i)_0 \sqrt{g_{ii}}) (\delta U^i \sqrt{g_{ii}}) = (\check{F}_i)_0 \delta \check{U}_i$. Обозначим:

$$(\check{O}_i)_0 \delta \check{U}_i = (\bar{\rho})_0 (\check{F}_i)_0 \delta \check{U}_i; \quad (\text{Д6.109})$$

тогда формулу (Д6.108-а) запишем как

$$\int_{\Omega} \vec{O} \cdot \delta \vec{U} d\Omega = \int_{\Omega_0} (\check{O}_i)_0 \delta \check{U}_i (d\Omega)_0. \quad (\text{Д6.110})$$

Д6.4.3. Выражение для поверхностного интеграла в TL-формулировке принципа возможных перемещений

Рассмотрим третий интеграл из (Д6.96), а именно $\int_{S_p} \vec{P} \cdot \delta \vec{U} dS$. Результирующий вектор поверхностной нагрузки на элементарной площадке $\vec{P} dS$ запишем в виде $\vec{P} dS = q \vec{\nu} dS$, где $q = q(\vec{x}, t)$ – распределенная нагрузка в точке поверхности; $\vec{\nu} = \nu_i \vec{G}^i$ – вектор нормали к поверхности в той же точке. Учтено, что именно контравариантные векторы $\vec{G}^i$ нормальны к деформированной поверхности, которую определяют два вектора $\vec{G}_j$ и $\vec{G}_k$ (здесь $i \neq j \neq k \neq i$; $i, j, k = 1, 2, 3$). Тогда

$$\int_{S_p} \vec{P} \cdot \delta \vec{U} dS = \int_{S_p} (q \nu_i \vec{G}^i) \cdot (\delta U^i \vec{e}_i) dS. \quad (\text{Д6.111})$$

Компоненты δU^i вектора вариации перемещений $\delta \vec{U} = \delta U^i \vec{e}_i$ преобразовывать нет необходимости, поскольку они определяются относительно исходной (недеформированной) конфигурации. Представим оставшуюся часть подынтегрального выражения, т.е. $q \nu_i \vec{G}^i dS$, в виде

$$q \nu_i \vec{G}^i dS = (p^j)_0 \vec{G}_j (dS)_0, \quad (\text{Д6.112})$$

где компоненты

$$(p^j)_0 = P^{ij} (\nu_i)_0 \quad (\text{Д6.113})$$

являются приведенными компонентами вектора нагрузки к поверхности единичной площади *исходной* (недеформированной) конфигурации, которые еще необходимо найти.

Компоненты ν_i в (Д6.112) определены относительно $\vec{G}_i$, т.е.:

$$\nu_i = X_i^j \nu_j; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (\text{Д6.114})$$

где ν_j являются компонентами вектора нормали к элементарной поверхности dS , определенные относительно $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$. Итак, вместо (Д6.112) запишем:

$$q X_i^j \nu_j \vec{G}^i dS = (P^{ij})_0 (\nu_i)_0 \vec{G}_j (dS)_0. \quad (\text{Д6.115})$$

Согласно формуле Нансона $X_i^j \nu_j dS = \sqrt{G} (\nu_i)_0 (dS)_0$. Подставим это выражение в левую часть формулы (Д6.115). После сокращения на $(dS)_0$ получим:

$$q \sqrt{G} (\nu_i)_0 \vec{G}^i = (P^{ij})_0 (\nu_i)_0 \vec{G}_j. \quad (\text{Д6.116})$$

С учетом (Д6.113) это выражение примет вид

$$q \sqrt{G} (\nu_i)_0 \vec{G}^i = (p^j)_0 \vec{G}_j. \quad (\text{Д6.117})$$

Умножим (Д6.117) скалярным образом на $\vec{G}_k$. Учитывая то, что $\vec{G}^i \cdot \vec{G}_k = \delta_k^i$; $(\nu_i)_0 \delta_k^i = (\nu_k)_0$; $\vec{G}_j \cdot \vec{G}_k = G_{jk}$, получим сначала, что

$$q \sqrt{G} (\nu_k)_0 = (p^j)_0 G_{jk}, \quad (\text{Д6.118})$$

а с учетом $G^{jk} = (G_{jk})^{-1}$ и $G^{jk} (\nu_k)_0 = G^{ji} (\nu_i)_0$:

$$(p^j)_0 = q \sqrt{G} G^{ji} (\nu_i)_0. \quad (\text{Д6.119})$$

Итак, вместо (Д6.111), с учетом (Д6.112) и (Д6.119), имеем выражение

$$\begin{aligned} \int_{S_P} \vec{P} \cdot \delta \vec{U} dS &= \int_{(S_P)_0} q \sqrt{G} G^{ji} (\nu_i)_0 \vec{G}_j \cdot (\delta U^i \vec{e}_i) (dS)_0 = \\ &= \int_{(S_P)_0} q \sqrt{G} (G^{ji} (\nu_i)_0 X_j^m \vec{e}_m) \cdot (\delta U^m \vec{e}_m) (dS)_0, \end{aligned} \quad (\text{Д6.120-а})$$

которое вычисляется в *исходной* (недеформированной) конфигурации.

С учетом (Д6.7) $(\delta_j^m + \nabla_j U^m) \vec{e}_m \cdot (\delta U^m \vec{e}_m) = (\delta_{jm} + \nabla_j \tilde{U}_m) \delta \tilde{U}_m$. Поэтому окончательно

$$\int_{S_P} \vec{P} \cdot \delta \vec{U} dS = \int_{(S_P)_0} q \sqrt{G} G^{ji} (\nu_i)_0 (\delta_{jm} + \nabla_j \tilde{U}_m) \delta \tilde{U}_m (dS)_0. \quad (\text{Д6.120-б})$$

Д6.4.4. Выражение принципа возможных перемещений при TL-формулировке

Если выражения (Д6.105-б), (Д6.110) и (Д6.120-б) подставить в принцип возможных перемещений (Д6.96), то получим его выражение при TL-формулировке (в компонентной форме):

$$\begin{aligned} \delta \Psi &= \int_{\Omega_0} (\sigma^{ij})_0 \delta \varepsilon_{ij} (d\Omega)_0 - \int_{\Omega_0} (\vec{O}_i)_0 \delta \tilde{U}_i (d\Omega)_0 - \\ &- \int_{(S_P)_0} q \sqrt{G} G^{ji} (\nu_i)_0 (\delta_{jm} + \nabla_j \tilde{U}_m) \delta \tilde{U}_m (dS)_0 = 0. \end{aligned} \quad (\text{Д6.121})$$

Напомним, что при этом считали, что объемная сила $(\vec{O}_i)_0$ является „мертвой”.

Д6.5. Конечно-элементная аппроксимация краевых задач при TL-формулировке и метод решения системы алгебраических уравнений

Д6.5.1. Конечно-элементная аппроксимация

Для создания системы алгебраических уравнений в NX Nastran применяется принцип возможных перемещений. Рассматриваем его выражение при TL-формулировке в случае, ко-

гда сила $\vec{F}$ является „мертвой”, а именно выражение (Д6.121). Здесь все величины – в „физической” системе координат.

Обозначим:

$$(\underline{p}_m)_0 = q\sqrt{G}G^{ji}(\nu_i)_0(\delta_{jm} + \nabla_j \tilde{U}_m). \quad (\text{Д6.122})$$

Поскольку аппроксимация будет истраться на конечно-элементной сетке, то вместо (Д6.121) с учетом (Д6.122) запишем его сеточный аналог

$$\delta \Psi_h = \left(\int_{\Omega_0} (\underline{\sigma}^{ij})_0 \delta \varepsilon_{ij} (d\Omega)_0 - \int_{\Omega_0} (\tilde{O}_i)_0 \delta \tilde{U}_i (d\Omega)_0 - \int_{(S_P)_0} (\underline{p}_m)_0 \delta \tilde{U}_m (dS)_0 \right)_h = 0. \quad (\text{Д6.123})$$

Далее нижний индекс $_h$ опускаем с целью упрощения записей.

Этот функционал в объединении с кинематическими ГУ на поверхности S_U

$$\tilde{U}_m|_{S_U} = \hat{g}_m, \text{ т.е. } \delta \tilde{U}_m|_{S_U} = 0 \quad (\text{Д6.124})$$

определяет бесчисленное множество возможных НДС. Действительное НДС – одно из виртуальных, но дополнительно удовлетворяет уравнениям связи между напряжениями и деформациями.

Поскольку в первом интеграле (Д6.123) компоненты выражения $(\underline{\sigma}^{ij})_0 \delta \varepsilon_{ij}$ тоже вычисляются в „физической” системе координат, то далее знак над величинами, указывающий на этот факт, будем опускать.

Есть несколько итерационных алгоритмов (методов) решения существенно нелинейных краевых задач, довольно хорошо изученных. При постановке краевой задачи в перемещениях с учетом неупругих деформаций, а также при учете геометрической нелинейности в NX Nastran применяется метод дополнительных нагрузок одновременно с методом Ньютона-Рафсона решения нелинейной САУ, порождаемой методом.

Весь процесс нагружения тела разбивается на этапы, на каждом из которых решается краевая задача. Результаты текущего этапа являются начальными условиями для следующего этапа. В частном случае рассматривается лишь один этап нагружения.

Для аппроксимации будущего решения применяется метод конечных элементов.

Введем векторы: $\{O\}_0 = \{O_1, O_2, O_3\}_0^T$ – объемных и $\{\underline{p}\}_0 = \{\underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3\}_0^T$ – приведенных поверхностных нагрузок. Функционал (Д6.123) с учетом матричных обозначений, введенных в Приложение 5, будет иметь вид:

$$\delta \Psi = \int_{\Omega_0} \{\delta \varepsilon\}^T \{\underline{\sigma}\}_0 (d\Omega)_0 - \int_{\Omega_0} \{\delta U\}^T \{O\}_0 (d\Omega)_0 - \int_{(S_P)_0} \{\delta U\}^T \{\underline{p}\}_0 (dS)_0 = 0. \quad (\text{Д6.125})$$

Определим, что $\{\delta \varepsilon\} = [\tilde{B}]\{\delta q\}_e$ (см. второе выражение в (Д5.92)) и $\{\delta \varepsilon\}^T = ([\tilde{B}]\{\delta q\}_e)^T = \{\delta q\}_e^T [\tilde{B}]^T$; $\{\delta U\} = \delta([\phi]\{q\}_e) = [\phi]\{\delta q\}_e$ и $\{\delta U\}^T = \{\delta q\}_e^T [\phi]^T$. Функционал (Д6.125) с учетом этих формул и возможности суперпозиции по КЭ работ внешних и внутренних сил, обусловленной тем, что КЭ не пересекаются, записывается как

$$\begin{aligned} \delta \Psi = \sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \{\delta q\}_e^T [\tilde{B}]^T \{\underline{\sigma}\}_0 (d\Omega)_0 - \\ - \sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{O\}_0 (d\Omega)_0 - \sum_e \int_{(S_P)_0} \{\delta q\}_e^T [\phi]^T \{\underline{p}\}_0 (dS)_0 = 0, \end{aligned} \quad (\text{Д6.126})$$

где знак $\sum_e$ означает суммирование по всем КЭ, содержащим актуальную степень свободы конкретного узла.

Так как векторы $\{\delta q\}_e^T$ не зависят от параметров интегрирования, их можно вынести за границы интегралов (как обычные константы). Из (Д6.126), сгруппировав интегралы, имеем:

$$\delta \Psi = \sum_e \{\delta q\}_e^T \left(\int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\varpi\}_0 (d\Omega)_0 - \int_{(\Omega^e)_0} [\phi]^T \{O\}_0 (d\Omega)_0 - \int_{(S_P^e)_0} [\phi]^T \{p\}_0 (dS)_0 \right) = 0. \quad (Д6.127)$$

Поскольку величины $\{\delta q\}_e^T$ – произвольные, то из (Д6.127)

$$\sum_e \left(\int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\varpi\}_0 (d\Omega)_0 - \int_{(\Omega^e)_0} [\phi]^T \{O\}_0 (d\Omega)_0 - \int_{(S_P^e)_0} [\phi]^T \{p\}_0 (dS)_0 \right) = 0. \quad (Д6.128)$$

Обозначим:

$$\{P\}_0 = \sum_e (\{P\}_0)_e; \quad (\{P\}_0)_e = \int_{(\Omega^e)_0} [\phi]^T \{O\}_0 (d\Omega)_0 + \int_{(S_P^e)_0} [\phi]^T \{p\}_0 (dS)_0. \quad (Д6.129-а)$$

Выражение (Д6.128) примет вид

$$\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\varpi\}_0 (d\Omega)_0 = \{P\}_0. \quad (Д6.130-а)$$

Д6.5.2. Алгоритм решения краевой задачи с учетом геометрической нелинейности на основе метода Ньютона-Рафсона

Для решения *нелинейных* САУ в NX Nastran используется метод Ньютона-Рафсона, обеспечивающий высокую скорость сходимости.

Согласно методу Ньютона-Рафсона решения нелинейных САУ считается, что

$$\{\psi\}^{(k+1)} \approx \{\psi\}^{(k)} + \left(\frac{\partial \{\psi\}}{\partial \{q\}} \right)^{(k)} \{dq\} \approx \{0\}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\}, \quad (Д6.131)$$

где вектор погрешности (вектор невязки) $\{\psi\}$ определяется как разность между правой и левой частями САУ; k – номер итерации. Поэтому из (Д6.130-а) вектор погрешностей

$$\{\psi\}^{(k)} = (\{P\}_0)^{(k)} - \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\varpi\}_0 (d\Omega)_0 \right)^{(k)}; \quad k = 0, 1, \dots \quad (Д6.132)$$

С учетом (Д6.132) выражение (Д6.131) запишем в виде итерационной (рекуррентной) последовательности СЛАУ

$$-\left(\frac{\partial \{\psi\}}{\partial \{q\}} \right)^{(k)} \{dq\} = (\{P\}_0)^{(k)} - \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\varpi\}_0 (d\Omega)_0 \right)^{(k)}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\}. \quad (Д6.133)$$

Осталось определиться с матрицей $\left(\frac{\partial \{\psi\}}{\partial \{q\}} \right)^{(k)}$. В соответствии с (Д6.132) для последовательности СЛАУ (Д6.133):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \{\psi\}}{\partial \{q\}} \right)^{(k)} \{dq\} &= \left(\frac{\partial}{\partial \{q\}} \left(\{P\}_0 - \sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\varpi\}_0 (d\Omega)_0 \right) \right)^{(k)} \{dq\} = \left(\frac{\partial \{P\}_0}{\partial \{q\}} \right)^{(k)} \{dq\} - \\ &- \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \frac{\partial [\tilde{B}]^T}{\partial \{q\}_e} \{\varpi\}_0 (d\Omega)_0 \right)^{(k)} \{dq\} - \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \frac{\partial \{\varpi\}_0}{\partial \{q\}_e} (d\Omega)_0 \right)^{(k)} \{dq\}. \end{aligned} \quad (Д6.134)$$

Отдельно рассмотрим каждое выражение из правой части (Д6.134).

Примем, что, несмотря на значительные перемещения, повороты и деформации являются относительно небольшими (до 2%) . Тогда можно принять, что

$$\left(\frac{\partial \{P\}_0}{\partial \{q\}} \right)^{(k)} \{dq\} \approx \{0\}. \quad (Д6.135)$$

Поскольку $[\tilde{B}] = [B] + [\bar{B}]$, а $\partial[B]/\partial\{q\}_e = [0]$, то, с учетом (Д5.83) и (Д5.76) ... (Д5.80), первый интеграл из правой части (Д6.134):

$$\begin{aligned} & \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \frac{\partial[\tilde{B}]^T}{\partial\{q\}_e} \{\varpi\}_0(d\Omega)_0 \right)^{(k)} = \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \frac{\partial[\bar{B}]^T}{\partial\{q\}_e} \{\varpi\}_0(d\Omega)_0 \right)^{(k)} = \\ & = \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \frac{\partial([A][W])^T}{\partial\{q\}_e} \{\varpi\}_0(d\Omega)_0 \right)^{(k)} = \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [W]^T \frac{\partial[A]^T}{\partial\{q\}_e} \{\varpi\}_0(d\Omega)_0 \right)^{(k)} = \\ & = \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [W]^T [\varpi]_0 [W](d\Omega)_0 \right)^{(k)}, \end{aligned} \quad (\text{Д6.136})$$

где учтена симметрия матрицы $[\varpi]_0$ из компонент вектора $\{\varpi\}_0$; что $([A][W])^T = [W]^T [A]^T$, $\partial[W]^T / \partial\{q\}_e = [0]$, а также, что матрица $\partial[A]^T / \partial\{q\}_e = [W]$.

Введем глобальную симметричную матрицу:

$$[K_\sigma]_0 = \sum_e ([K_\sigma]_0)_e, \quad \text{где } ([K_\sigma]_0)_e = \int_{(\Omega^e)_0} [G^*]^T [\tilde{S}] [G^*](d\Omega)_0. \quad (\text{Д6.137})$$

Тогда окончательно из первого интеграла из правой части (Д6.134) имеем

$$\left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} \frac{\partial[\tilde{B}]^T}{\partial\{q\}_e} \{\varpi\}_0(d\Omega)_0 \right)^{(k)} = \sum_e ([K_\sigma]_0)_e^{(k)} = ([K_\sigma]_0)^{(k)}. \quad (\text{Д6.138})$$

Рассмотрим последнее выражение из правой части (Д6.134). Определим, что

$$\frac{\partial\{\varpi\}_0}{\partial\{q\}_e} = \frac{\partial\{\varpi\}_0}{\partial\{\varepsilon\}} \frac{\partial\{\varepsilon\}}{\partial\{q\}_e} = [D^{ep}] \frac{\partial\{\varepsilon\}}{\partial\{q\}_e}. \quad (\text{Д6.139})$$

Согласно (Д5.92)

$$\frac{\partial\{\varepsilon\}}{\partial\{q\}_e} = [\tilde{B}]. \quad (\text{Д6.140})$$

Поэтому:

$$\left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \frac{\partial\{\varpi\}_0}{\partial\{q\}_e} (d\Omega)_0 \right)^{(k)} \{dq\} = \left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T [D^{ep}] [\tilde{B}](d\Omega)_0 \right)^{(k)} \{dq\}. \quad (\text{Д6.141})$$

Итак, осталось определиться с выражением для матрицы

$$[D^{ep}] = \frac{\partial\{\varpi\}_0}{\partial\{\varepsilon\}}. \quad (\text{Д6.142-a})$$

Вариантов таких выражений столько, сколько моделей материалов, т.е. много. Поэтому здесь выражения для матрицы $[D^{ep}]$ не рассматриваем.

Обозначим:

$$([\tilde{K}]_0)_e = \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T [D^{ep}] [\tilde{B}](d\Omega)_0; \quad [\tilde{K}]_0 = \sum_e ([\tilde{K}]_0)_e. \quad (\text{Д6.143})$$

Тогда окончательно левая часть первого выражения из (Д6.133) получит вид:

$$-\left(\frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}} \right)^{(k)} \{dq\} = ([K_\sigma]_0 + [\tilde{K}]_0)^{(k)} \{dq\}. \quad (\text{Д6.144})$$

Выражение в скобках правой части первой формулы (Д6.133) обозначим как

$$\{R\}_0 = \sum_e (\{R\}_0)_e, \quad \text{где } (\{R\}_0)_e = \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\varpi\}_0(d\Omega)_0. \quad (\text{Д6.145-a})$$

Тогда окончательно выражения (Д6.133), т.е. уравнения метода Ньютона-Рафсона получают вид:

$$([K_\sigma]_0 + [\tilde{K}]_0)^{(k)} \{dq\} \approx (\{P\}_0)^{(k)} - (\{R\}_0)^{(k)}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\}. \quad (\text{Д6.146-а})$$

Первое выражение (Д6.146-а) является линейной системой алгебраических уравнений для нахождения вектора-решения $\{dq\}$ на $(k+1)$ -й итерации согласно методу Ньютона-Рафсона. Она собрана на основе решения, полученного на предыдущей k -ой итерации: и матрица $([K_\sigma]_0 + [\tilde{K}]_0)$ СЛАУ, и вектор правой части СЛАУ.

На нулевой итерации, когда в теле еще нет напряжений и деформаций, компоненты выражения (Д6.146-а) $(\{R\}_0)^{(0)} = \{0\}$; $[K_\sigma]_0 = [0]$, а

$$[\tilde{K}]_0 = [K]_0, \text{ где } [K]_0 = \sum_e [K_0]_e; \quad [K_0]_e = \int_{(\Omega^e)_0} [B]^T [D] [B] (d\Omega)_0, \quad (\text{Д6.147})$$

поэтому на нулевой итерации (Д6.146-а) вырождается в

$$[K]_0 \{dq\} \approx (\{P\}_0)^{(0)}; \quad \{q\}^{(1)} = \{q\}^{(0)} + \{dq\}. \quad (\text{Д6.148-а})$$

Реально рассматриваются не бесконечные малые приращения, а конечные. Поэтому в (Д6.146-а) и (Д6.148-а) вместо знака дифференциала d используют знак приращения Δ :

$$([K_\sigma]_0 + [\tilde{K}]_0)^{(k)} \{\Delta q\} \approx (\{P\}_0)^{(k)} - (\{R\}_0)^{(k)}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{\Delta q\}; \quad (\text{Д6.146-б})$$

$$[K]_0 \{\Delta q\} \approx (\{P\}_0)^{(0)}; \quad \{q\}^{(1)} = \{q\}^{(0)} + \{\Delta q\}. \quad (\text{Д6.148-б})$$

Для алгоритма Ньютона-Рафсона доказаны теоремы существования и единственности решения. Алгоритм имеет большую скорость сходимости. Его основной недостаток – новые матрицы на каждой итерации.

Матрицу $[K_\sigma]$ называют матрицей *геометрической жесткости* (geometric stiffness matrix) или матрицей *начальных напряжений*.

Д6.6. Основные положения UL-формулировки алгоритмов решения геометрически нелинейных краевых задач

Согласно таблице Д6.1, при UL-формулировке в общем случае геометрической нелинейности (большие параллельные перемещения, большие вращения и большие деформации) используются напряжения Эйлера-Коши и логарифмические деформации Генки.

Итак, нужно рассмотреть вопрос о логарифмических деформациях Генки, а также об определяющих уравнениях, которые будут использоваться при формулировании постановок краевых задач, для получения системы алгебраических уравнений.

Д6.6.1. Разложение матрицы градиента деформации Грина на матрицы растяжения и вращательную (теорема о полярной декомпозиции)

Покажем, что (несимметричную) матрицу $[G]$ (Д6.26) всегда можно представить как

$$[G] = [R][H]_R, \quad (\text{Д6.149})$$

где $[R]$ – вращательная матрица (ортогональная), а $[H]_R$ – правая матрица чистой деформации (симметричная). Об этом утверждает теорема о полярной декомпозиции.

Рассмотрим не вырожденную положительно определенную матрицу

$$[C] = [G]^T [G]. \quad (\text{Д6.150})$$

Если $[R]$ является вращательной матрицей, то $[R]^T [R] = [I]$, где $[I]$ – единичная матрица. Поэтому, с применением (Д6.149):

$$[C] = ([R][H]_R)^T [R][H]_R = [H]_R^T ([R]^T [R]) [H]_R = [H]_R^T [I] [H]_R = [H]_R^T [H]_R = [H]_R^2. \quad (\text{Д6.151})$$

Учтено, что матрица $[H]_R$ должна быть симметричной, тогда $[H]_R^T[H]_R = [H]_R^2$.

Итак, поскольку в общем случае $[H]_R \neq [G]$, то

$$[H]_R = [C]^{1/2} = ([G]^T[G])^{1/2}. \quad (\text{Д6.152})$$

Но легко вычислить $[H]_R$ из (Д6.152) удастся лишь тогда, когда $[G]^T[G]$ является диагональной матрицей. В противном случае для получения компонент $[H]_R$ рассмотрим стандартную симметричную проблему собственных значений для симметричной матрицы $[C]$:

$$[C]\{w\} = \lambda\{w\}. \quad (\text{Д6.153})$$

Из полученных собственных значений $\lambda_i > 0$; $i = 1, 2, 3$ сложим диагональную матрицу $[\lambda_c]$, а из собственных векторов (столбцов) $\{w\}$ – матрицу собственных векторов $[W]_R$.

Матрице $[H]_R$ соответствует тензор $\vec{H}_R$. Поскольку есть прямая связь между $[C]$ и $[H]_R$, а именно $[C] = [H]_R^2$, то любой главный базис тензора $\vec{C}$ будет одновременно главным базисом тензора $\vec{H}_R$, который порождает матрицу $[H]_R$ (и наоборот). Поскольку матрица $[C]$ не вырождена, а также положительно определена, то ее собственные значения являются положительными, которые вместе с тем являются квадратами собственных значений матрицы $[H]_R$. Поэтому из величин $\sqrt{\lambda_i} \geq 0$ можно собрать новую диагональную матрицу, обозначим ее как $[\underline{H}]$:

$$[\underline{H}] = [\lambda_c]^{1/2}. \quad (\text{Д6.154})$$

Тогда с применением матрицы $[\underline{H}]$ и матрицы собственных векторов $[W]_R$ можно получить матрицу, которая и будет искомой матрицей $[H]_R$:

$$[H]_R = [W]_R[\underline{H}][W]_R^T. \quad (\text{Д6.155})$$

Вращательную матрицу $[R]$ можно получить из выражения (Д6.149):

$$[R] = [G][H]_R^{-1}. \quad (\text{Д6.156})$$

Свойство $[R]^T[R] = [I]$, обязательное для вращательной матрицы, было заложено при получении матрицы $[H]_R$. Чтобы матрица $[R]$ была вращательной матрицей, ей еще нужно иметь $\det[R] = 1$. Это действительно так, поскольку:

$$\det[R] = \det[G] \cdot \det[H]_R^{-1} = \sqrt{G} / \det[H]_R = \sqrt{G} / \det[\underline{H}] = \sqrt{G} / \det[\lambda_c]^{1/2} = \sqrt{G} / \sqrt{G} = 1.$$

Симметричная проблема собственных значений для не вырожденной, положительно определенной матрицы имеет лишь один вариант решения. Поэтому и полярная декомпозиция (Д6.149) тоже имеет лишь один вариант.

Кроме *правой* матрицы чистой деформации $[H]_R$ еще рассматривают *левую* матрицу чистой деформации $[H]_L$, а именно, вместо (Д6.149) – формулу

$$[G] = [H]_L[R]. \quad (\text{Д6.157})$$

Действия – аналогичны. С использованием (Д6.149) $[G] = [R][H]_R = [H]_L[R]$, поэтому

$$[H]_L = [R][H]_R[R]^T; \quad [H]_L = [W]_L[\underline{H}][W]_L^T; \quad [W]_L = [R][W]_R; \quad [W]_R = [R]^T[W]_L. \quad (\text{Д6.158})$$

Примечание Д6.4. Согласно (Д6.149) деформирование рассматривается как процесс, в котором последовательно реализуются: сначала чистая деформация элементарного объема, потом – его жесткое вращение. В случае использования декомпозиции (Д6.157) процесс происходит строго наоборот: сначала – жесткое вращение, потом – чистая деформация.

В обоих случаях матрицы $[H]_R$ и $[H]_L$ с чистой деформацией элементарного объема вычисляются через матрицу $[\underline{H}]$, которая фактически содержит чистую деформацию *в направлении главных осей* деформации, т.е. матрица $[\underline{H}]$ не содержит угловых деформаций (является диагональной). Это позволяет интерпретировать диагональные компоненты матрицы $[\underline{H}]$ как представителей главных деформаций тензоров деформаций и определить, в частности, тензор деформаций Грина-Лагранжа как (матричное обозначение, нормированная ортогональная система координат)

$$[\varepsilon] = [W]_R (0.5([\underline{H}]^2 - [I])) [W]_R^T. \quad (Д6.159)$$

Д6.6.2. Логарифмические деформации Генки (Hencky)

Если считать, что направление деформации волокна материала с исходной длиной L_0 при деформировании не изменяется, то текущую продольную деформацию волокна можно определить как

$$\varepsilon = \int_{L_0}^L \frac{dx}{x} = \ln \left(\frac{L}{L_0} \right) = \ln \left(\frac{L_0 + \Delta L}{L_0} \right) = \ln(1 + \bar{\varepsilon}), \quad \text{где } \bar{\varepsilon} = \frac{\Delta L}{L_0}. \quad (Д6.160)$$

Это и есть логарифмическая деформация Генки для волокна материала.

Если использовать матрицы собственных векторов $[W]_R$, то тензор деформации Генки можно определить как (матричное обозначение)

$$[\varepsilon]_H = [W]_R [\Lambda] [W]_R^T, \quad (Д6.161)$$

где диагональная матрица $[\Lambda]$ содержит компоненты

$$\lambda_{ii} = \ln(1 + \bar{\varepsilon}_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (Д6.162)$$

Примечание Д6.5. Поскольку в определении тензоров деформаций Грина-Лагранжа (Д6.159) и Генки (Д6.161) отсутствует вращательная матрица $[R]$ (есть только главные деформации и матрицы собственных векторов), то это означает, что эти оба тензора не зависят от жесткого вращения и смещения элементарного объема тела.

Примечание Д6.6. Из примечания Д6.5 следует, что компоненты тензора *малых* деформаций (Д5.8) генерируют паразитные (на самом деле отсутствующие) деформации при жестком вращении и смещении элементарного объема тела. Именно поэтому формулами (Д5.8) нельзя пользоваться при наличии жесткого вращения и смещения элементарного объема тела.

Логарифмические деформации Генки при **UL**-формулировке применяются для вычисления компонент матрицы, аналогичной по смыслу $[D^{ep}]$ (см. формулу (Д6.142-а)) при наличии необратимых деформаций.

Д6.6.3. Сходства и особенности **UL**- и **TL**-формулировок алгоритмов решения геометрически нелинейных краевых задач

Как было указано в Разделе Д6.1, **UL**-формулировка отличается от **TL**-формулировки тем, какая геометрия выбирается опорной: для **UL** – *начальная*, для **UL** – *созданная предыдущим этапом нагружения*. Поэтому существенных изменений при получении системы алгебраических уравнений не будет.

Вводится внутреннее время, весь этап нагружения автоматически делится на несколько (например, на 10) промежуточных этапов – слоев. Верхним индексом n будем обозначать такой временной слой. Нижний индекс, как и ранее, определяет начальную конфигурацию.

Поскольку деформации всегда вычисляются относительно начального состояния, то начнем почти с конца: с уравнения (Д6.130-а) с учетом (Д6.129-а).

Будем считать, что есть решение на n – м временном слое, рассматривается следующий, $(n+1)$ – й. Изменится опорная геометрия: вместо $(\Omega^e)_0$ и $(S_p^e)_0$ будут $(\Omega^e)_0^n$ и $(S_p^e)_0^n$. Напряжения $\{\varepsilon\}_0$, объемные $\{O\}_0$ и поверхностные $\{p\}_0$ силы на опорной геометрии n – го временного слоя обозначим как $\{\varepsilon\}_0^n$, $\{O\}_0^n$ и $\{p\}_0^n$ соответственно.

Уравнения (Д6.129-а) и (Д6.130-а) изменяются на:

$$(\{P\}_0^n)_h = \sum_e ((\{P\}_0^n)_e)_h; \quad ((\{P\}_0^n)_e)_h = \left(\int_{(\Omega^e)_0^n} [\phi]^T \{O\}_0^n (d\Omega)_0^n + \int_{(S_p^e)_0^n} [\phi]^T \{p\}_0^n (dS)_0^n \right)_h; \quad (\text{Д6.129-б})$$

$$\left(\sum_e \int_{(\Omega^e)_0^n} [\tilde{B}]^T \{\varepsilon\}_0^n (d\Omega)_0^n \right)_h \approx (\{P\}_0^n)_h. \quad (\text{Д6.130-б})$$

Вместо (Д6.142-а) и (Д6.145-а) будем иметь соответственно

$$[D^{ep}] = \frac{\partial \{\varepsilon\}_0^n}{\partial \{\varepsilon\}}; \quad (\text{Д6.142-б})$$

$$\{R\}_0^n = \sum_e (\{R\}_0^n)_e, \quad \text{где } (\{R\}_0^n)_e = \int_{(\Omega^e)_0} [\tilde{B}]^T \{\varepsilon\}_0^n (d\Omega)_0. \quad (\text{Д6.145-б})$$

Как и ранее отметим, что вариантов таких выражений столько, сколько моделей материалов, т.е. много. Поэтому здесь выражения для матрицы $[D^{ep}]$ не рассматриваем.

Вместо (Д6.146-б) получим такую систему уравнений:

$$([K_\sigma]_0^n + [\tilde{K}]_0^n)^{(k)} \{\Delta q\} \approx (\{P\}_0^n)^{(k)} - (\{R\}_0^n)^{(k)}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{\Delta q\}; \quad (\text{Д6.146-в})$$

Кроме того $(\{\varepsilon\}_0^n)^{(0)} = \{\sigma\}_0^n$, т.е. являются напряжениями Эйлера-Коши с компонентами σ^{ij} , достигнутыми на конец предыдущего (n – го) этапа нагружения. Стартовое уравнение (Д6.148-б) остается (только при $n = 0$), т.е. старт обоих алгоритмов является одинаковым: упругим и по уравнениям бесконечно малых деформаций.

В завершении отметим следующее:

- в NX Nastran алгоритмы (Д6.146) носят название алгоритмами *континуальной механики возрастающей TL- и UL-формулировки* (**Continuum Mechanics Incremental Total and Updated Lagrangian Formulations**);

- к сожалению, обозначения в этом Разделе иногда значительно отличаются от обозначений, примененных в „**Help**” NX Nastran. Причиной этого являются старания автора упростить обозначения, а также сохранить одинаковую систему обозначений для всех Приложений, в которых излагается теоретические основы;

- основной публикацией, на которую ссылается „**Help**” по этому вопросу, является книга [66].