# Додаток 5

# КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ПРО НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ТВЕРДИХ ТІЛ. СТАТИКА. МАЛІ ДЕФОРМАЦІЇ (теорія)

## Д5.1. Основні рівняння механіки тіла, що деформується, у елементарному об'ємі тіла

При постановках крайових задач про напружено-деформований стан твердого тіла, що деформується, застосовуються відповідні комбінації рівнянь статичної рівноваги, геометричних співвідношень та рівнянь фізичних моделей матеріалу. Тут будуть розглянуті тільки ті, що застосовуються у NX Nastran. Враховано, що у NX Nastran усі задачі формулюються у переміщеннях із застосуванням Лагранжевого підходу.

Звичайно припускається, що в початковий момент  $t_0$  в розглядуваному тілі переміщення  $U_i(\vec{x}, t_0)$ , деформації  $\varepsilon_{ii}(\vec{x}, t_0)$ , напруження  $(\sigma_{mn})_0 = \sigma_{mn}(\vec{x}, t_0)$  мають відомі (частіше – нульові) значення, відомо початкове поле температур  $\hat{T}_0 = T(\vec{x}, t_0)$ . Далі припускається, що навантаження змінюється кроками (n – номер кроку); що в об'ємі тіла  $\Omega$ , а також на частині його поверхні  $S_G = S_U \cup S_P$  за деякий проміжок часу  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  відбудеться зміна навантажень, тобто на момент часу  $t^{n+1}$  були прикладені:  $\hat{O}_m(\vec{x},t) = \rho \cdot \hat{F}_m(\vec{x},t) - \text{об'ємні}$  сили  $(\vec{F}(\vec{x},t)$  – вектор масової сили),  $\hat{P}_m(\vec{x},t)$  – поверхневі сили на  $S_P$ ;  $\hat{R}_m(\vec{x},t)$  – зосереджені сили; відбулися переміщення  $\hat{U}_i(\vec{x},t)$  – на  $S_U$ , а також в  $\Omega$  змінилася температура на величини  $\Delta \hat{T}(\vec{x},t) = \hat{T}(\vec{x},t) - \hat{T}_0$ . Тоді для визначення в кожній точці (її однорідного околу) тіла величин:  $U_i(\vec{x},t)$  – переміщень,  $\varepsilon_{ii}(\vec{x},t)$  – деформацій,  $\sigma_{mn}(\vec{x},t)$  – напружень, а також інших, похідних від них, формулюється крайова задача.

### Д5.1.1. Системи координат

У NX Nastran застосовуються три системи координат (усі – ортогональні): декартова, циліндрична та сферична. Але всі рівняння розглядаються у "фізичній" (місцевій), тобто в нормованій, системі координат:

$$\vec{b}_j = \vec{e}_j / \sqrt{g_{jj}}; \quad j = 1, 2, 3,$$
 (Д5.1)

де  $\vec{e}_{j}$  – вектори основного базису;  $g_{ij}$  – компоненти метричного тензора. Це дозволяє виключити метрику простору з фізичних рівнянь.

#### Д5.1.2. Рівняння статичної рівноваги в елементарному об'ємі тіла

Рівняння рівноваги як окремий випадок рівняння руху описуються формулою:

$$\nabla_n \sigma_{mn} + \hat{O}_m = 0, \qquad (Д5.2)$$

де значок «^» над змінної вказує на те, що її величина задається.

#### Д5.1.3. Геометричні співвідношення в елементарному об'ємі тіла

Відповідно до підходу Лагранжа координати будь-якої точки тіла М (або центра елементарного об'єму) після деформування можуть бути описані формулою  $x_i = x_i(X_i, t)$ , де  $x_i(X_i, 0) = X_i$  – початкові координати точки; *i*, *j* =1,2,3, а *n* – номер часового шару (кроку навантаження). Оскільки у "фізичній" системі координат компоненти метричного тензора  $g_{ij} = g^{ij} = \delta_{ij}$ , то компоненти тензора міри деформації Коші-Гріна:

$$G_{ij} = F_{ik} \cdot F_{jk} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i} \frac{\partial x_k}{\partial X_j}, \quad \text{ge } F_{ik} = \frac{\partial x_k}{\partial X_i}. \tag{Д5.3}$$

Тоді поточні компоненти симетричного тензора деформації Лагранжа-Гріна (відносно початкової конфігурації):

$$\varepsilon_{ii} = (G_{ii} - \delta_{ii})/2,$$
 (Д5.4)

або через компоненти вектора переміщень:

$$\varepsilon_{ij} = (\nabla_j U_i + \nabla_i U_j + \nabla_i U_k \nabla_j U^k) / 2; \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$
 (Д5.5)

де позначено

$$\nabla_{i}U_{j} = \partial U_{j} / \partial X_{i} - U_{k}\Gamma_{ij}^{k}; \quad \nabla_{j}U^{i} = \partial U^{i} / \partial X_{j} + U^{k}\Gamma_{jk}^{i}; \qquad (Д5.6)$$

Г<sub>іі</sub> – символи Крістофеля другого роду, що симетричні за нижніми індексами і є компонентами розкладу  $\partial \vec{e}_i / \partial X_i$  по вихідному базису  $\vec{e}_m$ , виражаються формулою

$$\Gamma_{mi}^{j} = \Gamma_{im}^{j} = g^{jn} (\partial g_{mn} / \partial X_{i} + \partial g_{in} / \partial X_{m} - \partial g_{mi} / \partial X_{n}) / 2.$$
(Д5.7)

Якщо деформації – малі, то в (Д5.5) величинами другого порядку малості нехтують:

$$\varepsilon_{ij} = \left(\nabla_i U_j + \nabla_j U_i\right)/2. \tag{Д5.8}$$

Завжди вважається, що деформації – сумісні (відповідають відомим рівнянням сумісності). Також будемо вважати, що можна використовувати суперпозицію деформацій:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon^{e}{}_{ij} + \varepsilon^{T}_{ij} + \varepsilon^{C}_{ij} + \varepsilon^{P}_{ij}, \qquad (Д5.9)$$

тобто загальні деформації  $\varepsilon_{ij}$  є алгебраїчною сумою пружних  $\varepsilon^{e_{ij}}$ , температурних  $\varepsilon^{T}_{ij}$ , повзучості  $\varepsilon^{C}_{ii}$  та пластичності  $\varepsilon^{P}_{ii}$  (при малих деформаціях (Д5.9) виконується точно). Пружні деформації є завжди, інші – тільки коли розглядається відповідна крайова задача.

#### Д5.1.4. Рівняння фізичних моделей матеріалу в елементарному об'ємі тіла

#### Д5.1.4.1. Рівняння для визначення температурних деформацій

Компоненти тензора температурної деформації для ізотропного матеріалу у NX Nastran 5.0 розраховуються за формулою

$$\varepsilon_{ij}^{T} = \delta_{ij} \alpha_{T} \Delta \widehat{T}; \qquad \Delta \widehat{T} = T - T_{0}, \qquad (\text{Д5.10-a})$$

де  $\alpha_T$  – коефіцієнт лінійного температурного подовження; T – поточна температура;  $T_0$  – початкова температура (завжди призначається для проведення розрахунків зі врахуванням температурної деформації, у FEMAP – як **Default Temperature**  $T_{def}$ , тобто  $T_0 = T_{def}$ ). Вважається, що при  $T_0 = T_{def}$  температурна деформація відсутня.

У випадку анізотропії матеріалу:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^{T} = (\boldsymbol{\alpha}_{ij})_{T} \Delta \widehat{T}, \qquad (\text{Д5.10-6})$$

де тензор коефіцієнтів лінійного температурного подовження  $(\alpha_{ii})_T$  – діагональний.

Коефіцієнт лінійного температурного подовження, як і інші характеристики матеріалу, може залежати від температури, хоча така залежність - слабка і нею часто нехтують. При цьому у діалогу FEMAP вводиться значення  $\alpha_{Tref} = \alpha_T(T_{ref})$ , де  $T_{ref}$  є опорною температурою випробування матеріалу (якщо вона не вказана, то звичайно дорівнює 20°С), а також – функція температури F(T), причому  $F(T_{ref}) \equiv 1.0$ . Поточне значення  $\alpha_T(T) = \alpha_{Tref} \cdot F(T)$ .



Рис.Д5.1. До отримання формули (Д5.13)

Але усі функції у FEMAP зберігаються в табличному (дискретному) вигляді. Тому для проміжних значень температури повинна застосовуватися апроксимаційна формула. У UGS.F93 використовується лінійна апроксимація, тому поточне значення (див. також (Д4.9)):

$$\alpha_{T}(T) = \alpha_{Tref} \cdot F(T) \approx \alpha_{Tref} \cdot \left\{ F(T_{(k)}) + \frac{T - T_{(k)}}{T_{(k+1)} - T_{(k)}} \left[ F(T_{(k+1)}) - F(T_{(k)}) \right] \right\}, \quad (A5.11)$$

де k – номер точки на графіку F(T).

Зміну температури пов'язують зі зміною енергії атомів, яка супроводжується зміною амплітуди їх коливань. Тому у звичайних умовах *ніщо не може завадити реалізації температурних деформацій*. За це їх звуть такими, "що не стискуються". Температурна деформація завжди миттєва, тобто *відповідає поточній температурі*, тому замість (Д5.10-а) потрібно застосовувати якийсь інший вираз.

Щоб не змінювати привичний запис формули для температурної деформації, замість  $\alpha_T$  вводять  $\overline{\alpha}_T(T)$ . Згідно з рис.Д5.1  $\varepsilon_T = a - b$ . Якщо прийняти, що

$$tg(\gamma_1) = \alpha_T(T_0); \quad tg(\gamma_2) = \alpha_T(T), \qquad (Д5.12)$$

то 
$$a = tg(\gamma_2) \cdot (T - T_{ref}) = \alpha_T(T) \cdot (T - T_{ref})$$
 та  $b = tg(\gamma_1) \cdot (T_0 - T_{ref}) = \alpha_T(T_0) \cdot (T_0 - T_{ref})$ . Тоді

$$\bar{\alpha}_{T}(T) = \left[\alpha_{T}(T) \cdot (T - T_{ref}) - \alpha_{T}(T_{0}) \cdot (T_{0} - T_{ref})\right] / (T - T_{0}); \qquad (A5.13)$$

$$\varepsilon_{ij}^{T} = \delta_{ij}\overline{\alpha}_{T}(T) \cdot (T - T_{0}) = \delta_{ij} \left[ \alpha_{T}(T) \cdot (T - T_{ref}) - \alpha_{T}(T_{0}) \cdot (T_{0} - T_{ref}) \right]. \tag{Д5.14}$$

У "Help" NX Nastran 5.0 такий коефіцієнт  $\bar{\alpha}_T(T)$  називають "*січним* для температурного діапазону значенням  $\alpha_T$ ". **Увага**: формула (Д5.14) є вірною за умови, що табличні значення  $\alpha_T(T)$  відповідають формулам (Д5.12).

При використанні у NX Nastran 5.0 варіанта SOL 601 (,,передовий" нелінійний аналіз) вважається, що  $T_{ref}$  співпадає з початковою температурою  $T_0$ . Тоді  $\bar{\alpha}_T = \alpha_T(T)$  та

$$\varepsilon_{ii}^{T} = \delta_{ii} \alpha_{T}(T) \cdot (T - T_0). \tag{Д5.15}$$

#### Д5.1.4.2. Рівняння для визначення лінійно-пружних деформацій

Між напруженнями та *пружними* деформаціями існує однозначна функціональна залежність. Звичайно вводять поняття функціонала пружної енергії (або пружного потенціалу) *W*, за допомогою якого закон пружності виражається як

$$\sigma_{mn} = \partial W / \partial \varepsilon_{mn} \,. \tag{Д5.16}$$

Для лінійно-пружної моделі матеріалу це є закон Гука:

$$\sigma_{mn} = E_{mnij} \varepsilon_{ij}^{e} \quad \text{abo} \quad \varepsilon_{ij}^{e} = C_{ijmn} \sigma_{mn}, \tag{Д5.17}$$

де  $E_{mnij}$ ,  $C_{ijmn}$  – тензори четвертого рангу з модулів пружності, які в загальному випадку можуть залежати від координат і температури. Крім того, розрізняють матеріали ізотропні та анізотропні. У NX Nastran можна застосовувати такі різновиди анізотропії: ортотропія та повна анізотропія (двовимірна або тривимірна).

У матричному запису лінійний закон Гука для анізотропного матеріалу має вигляд

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ Cumetpuytho & E_{55} & E_{56} \\ E_{33} & E_{31} \\ & & & & & & & & \\ \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{12}^{e} \\ \varepsilon_{22}^{e} \\ \varepsilon_{33}^{e} \\ \varepsilon_{33}^{e} \\ \varepsilon_{33}^{e} \\ \varepsilon_{31}^{e} \\$$

для тривимірного випадку та

$$\begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{cases} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{11}^{e} \\ \varepsilon_{22}^{e} \\ \gamma_{12}^{e} \end{cases}$$
(Д5.19)

для двовимірного. Тут  $2\gamma_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^e$  при  $i \neq j$ , а усі константи задаються у напрямках головних осей анізотропії.

Для ортотропного матеріалу в тривимірному випадку закон Гука (Д5.17) записується у вигляді

$$\begin{cases} \varepsilon_{11}^{e} \\ \varepsilon_{22}^{e} \\ \varepsilon_{33}^{e} \\ \gamma_{12}^{e} \\ \gamma_{23}^{e} \\ \gamma_{31}^{e} \end{cases} = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -v_{21}/E_{22} & -v_{31}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -v_{12}/E_{11} & 1/E_{22} & -v_{32}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -v_{13}/E_{11} & -v_{23}/E_{22} & 1/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{31} \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \end{bmatrix},$$
 (Д5.20)

де  $v_{12} / E_{11} = v_{21} / E_{22}$ ,  $v_{13} / E_{11} = v_{31} / E_{33}$  та  $v_{23} / E_{22} = v_{32} / E_{33}$ , тобто матриця – симетрична, містить 9 незалежних констант:  $E_{11}, E_{22}, E_{33}, G_{12}, G_{23}, G_{31}, v_{12}, v_{23}, v_{31}$ . У двовимірному випадку

$$\begin{cases} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{cases} = \begin{bmatrix} E_{11} / (1 - v_{12} v_{21}) & v_{12} E_{22} / (1 - v_{12} v_{21}) & 0 \\ v_{12} E_{22} / (1 - v_{12} v_{21}) & E_{22} / (1 - v_{12} v_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 / G_{12} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{11}^{e} \\ \varepsilon_{22}^{e} \\ \gamma_{12}^{e} \end{cases},$$
 (Д5.21)

де  $v_{12}/E_{11} = v_{21}/E_{22}$ ;  $G_{12} = E_{11}E_{22}/(E_{11} + E_{22} + 2E_{11}v_{12})$ , тобто матриця містить лише 3 незалежні константи:  $E_{11}, E_{22}, v_{12}$  .

У ізотропного матеріалу незалежних пружних характеристик лише дві: модуль Юнга Е та коефіцієнт Пуассона  $\nu$ , тобто усі  $E_{ij} = E$  та  $\nu_{ij} = \nu$ . Модуль зсуву пов'язаний з цими характеристиками формулою  $G = E/[2(1+\nu)]$ .

Для двовимірної задачі є ще одне додаткове рівняння: для  $\sigma_{33}$  у випадку плоского деформованого стану (ПДС, при  $\varepsilon_{33}^{e} = 0$ ) або для  $\varepsilon_{33}^{e}$  у випадку плоского напруженого стану (ПНС, при  $\sigma_{33} = 0$ ). У випадку вісесиметричної задачі компоненти  $\varepsilon_{r\theta} = \varepsilon_{\theta z} = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0$ .

#### Д5.1.4.3. Рівняння для визначення нелінійно-пружних деформацій

У NX Nastran є лише дві моделі нелінійно-пружних матеріалів.

Для ізотропного пружно-нелінійного матеріалу (у NX Nastran позначається як Nonlinear Elastic) фізичні рівняння можна представити у вигляді трьох законів:

• закон пружної зміни об'єму

$$\varepsilon_V^S = \sigma_V / 3k; \quad \varepsilon_V^P = \varepsilon_V^C = 0; \tag{Д5.22}$$

• тензорне співвідношення (закон зміни форми)

$$e_{ii}^{s} = \varphi \cdot S_{ii}; \quad \varphi = 3\varepsilon_{u}^{s} / 2\sigma_{u}; \tag{Д5.23}$$

• рівняння стану, що визначається експериментально та задається у вигляді функціональної залежності (функціонала):

$$\sigma_u = K(\varepsilon_u^S), \tag{Д5.24}$$

де  $\varepsilon_V = \delta_{ii} \varepsilon_{ii} / 3$  і  $\sigma_V = \delta_{ii} \sigma_{ii} / 3$  – об'ємні деформація і напруження відповідно;  $k = k(\vec{x}, T)$  – модуль об'ємного стискування;  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij}\varepsilon_V$  і  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_V$  – компоненти девіаторних частин тензорів деформацій і напружень відповідно;  $\varepsilon_u^s$  і  $\sigma_u$  – інтенсивності "стиснених" деформацій  $\varepsilon_{ii}^{S} = \varepsilon_{ii} - \varepsilon_{ii}^{T}$  і напружень  $\sigma_{ii}$  відповідно. У пружному матеріалі немає необоротних деформацій, тому "стиснені" деформації – пружні. З урахуванням (Д5.7) та (Д5.15)  $\varepsilon_{u}^{S} = \varepsilon_{u}$ . У NX Nastran функціонал (Д5.24) вводиться у вигляді таблиці для двох квадрантів: першого (крива розтягу) та третього (крива стиску).

Інший пружно-нелінійний матеріал – типу гуми. У NX Nastran для такого матеріалу (позначається як Hyperelastic) застосовується полігональна форма моделі Муні-Рівліна (Mooney-Rivlin).

При v = 0.5 третій інваріант тензора міри деформацій Коші-Гріна (перший вираз у (Д5.3))

$$I_3 = \det G_{ij} = 1, \tag{Д5.25}$$

тобто компоненти G<sub>ii</sub> повинні задовольняти цій умові. Якщо скористатися теорією штрафу, то вираз для функціонала пружної енергії можна представити у вигляді

$$W = \overline{W}(\varepsilon_{ii}) + \lambda(I_3 - 1), \qquad (Д5.26)$$

де  $\overline{W} = \overline{W}(I_1, I_2)$ , а інваріанти

$$I_{1} = \delta^{im} G_{mi}; \quad I_{2} = (\delta^{im} \delta^{jn} G_{mi} G_{nj} - \delta^{im} \delta^{jn} G_{ij} G_{mn})/2.$$
(Д5.27)

Тоді замість (Д5.16)

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} + \lambda \frac{\partial I_3}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} + 2\lambda G^{ij} = \frac{\partial \overline{W}}{\partial \varepsilon_{ij}} + pG^{ij}, \qquad (Д5.28)$$

де  $p = 2\lambda$  – гідростатичний тиск, а компоненти  $\varepsilon_{ij}$  задовольняють умові (Д5.18). Отже, перший доданок у (Д5.28) описує "викривлення", а другий – зміну об'єму.

Апроксимацію  $\overline{W} = \overline{W}(I_1, I_2)$  поліномом можна записати у вигляді зрізаного ряду:

$$\overline{W} = \sum_{m+n=1}^{p} A_{mn} (I_1 - 3)^m (\overline{I}_2 - 3)^n ; \qquad m, n = 0, 1, \dots,$$
(Д5.29)

де  $p = \max\{m+n\}; \bar{I}_2 = (I_1^2 - I_2)/2;$  а компоненти  $A_{mn}$  мають таку же розмірність, як і модуль Юнга.

У цьому розкладі звичайно зберігають члени однакової степені р. Наприклад, якщо p = 3, то отримаємо дев'ятикомпонентну модель:

$$\overline{W} \approx A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(\overline{I}_2 - 3) + A_{11}(I_1 - 3)(\overline{I}_2 - 3) + A_{20}(I_1 - 3)^2 + A_{02}(\overline{I}_2 - 3)^2 + A_{30}(I_1 - 3)^3 + A_{03}(\overline{I}_2 - 3)^3 + A_{21}(I_1 - 3)^2(\overline{I}_2 - 3) + A_{12}(I_1 - 3)(\overline{I}_2 - 3)^2.$$
(Д5.30)

3 (Д5.30) легко отримати моделі з п'яти (p=2) та трьох (p=1) компонент. Якщо зберегти лише два лінійних члена ( p = 1), то це буде модель Муні-Рівліна, яка задовільно описують поведінку матеріалів типа "гума" при деформаціях десь до 450...500 відсотків:

$$\overline{W} \approx A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(\overline{I}_2 - 3) = A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(I_1^2 - I_2 - 6)/2.$$
(Д5.31)

Якщо в (Д5.31) прийняти  $A_{01} = 0$ , то це буде модель неогуківського матеріалу.

Однак якщо застосовувати співвідношення (Д5.28), то необхідно залучати ще одне рівняння для визначення величини гідростатичного тиску, що збільшує загальну кількість рівнянь. Тому замість виразу (Д5.28) звичайно застосовують модель

$$W = \overline{W} + \sum_{k} D_{k} (J-1)^{2(k+1)}; \quad \text{afo} \quad W = \overline{W} + \sum_{k} D_{k} (J-1-\alpha_{T}\Delta T)^{2(k+1)}; \quad k = 0, 1, \dots (\Pi 5.32)$$

де J – детермінант градієнта деформацій  $F_{ii} = \partial x_i / \partial X_i$ ;  $\alpha_T \Delta T$  – температурна деформація, а компоненти D<sub>k</sub> мають таку же розмірність, як і модуль Юнга. Простіший варіант:

$$W = \overline{W} + D_0 (J-1)^2 \quad \text{afo} \quad W = \overline{W} + D_0 (J-1-\alpha_T \Delta T)^2.$$
 (Д5.33)

Величину  $D_0$  розраховують за формулою

$$D_0 = (A_{10} + A_{01})/(1 - 2\nu), \tag{Д5.34}$$

де коефіцієнт Пуассона v необхідно задавати у межах 0.495 ... 0.4999 (рекомендують, щоб було  $D_0 < 10^3 (A_{10} + A_{01}))$ . Якщо  $\overline{W}$  відповідає (Д5.31), а деформації – незначні, то величини  $2(A_{10} + A_{01}) = G$  – модуль зсуву, а  $2D_0 = K$  – об'ємний модуль.

Є й інші моделі. Наприклад, така:

$$W = A_{10}(I_1 - 3) + A_{01}(I_2 - 3) + C(I_3^{-2} - 1) + D(I_3 - 1)^2,$$
(Д5.35)

де для обчислення *C* та *D* застосовують формули:  $C = A_{10} / 2 + A_{01}; D = [A_{10}(5\nu - 2) + A_{01}(11\nu - 5)]/[2(1 - 2\nu)].$ (Д5.36)

## Д5.1.4.4. Рівняння для визначення пружно-пластичних деформацій

У NX Nastran застосовується декілька моделей пружно-пластичного матеріалу: для ізотропного, ортотропного та анізотропного матеріалу з ізотропним, кінематичним або ізотропно-кінематичним зміцненням, для чотирьох різних умов визначення пластичного стану, з можливістю урахування впливу температури або швидкості деформування матеріалу на межу його плинності. У всіх моделях деформації – малі, або не перевищують 2%.

Але у супроводжувальної документації ("Help") немає детального пояснення щодо застосованих пружно-пластичних моделей матеріалів. Тому моделі матеріалу для визначення пружно-пластичних деформацій у NX Nastran наведені тут з деякою долею імовірності.

У моделі асоційованої пластичної плинності виконується закон пружної зміни об'єму (Д5.20), а приріст пластичних деформацій зв'язують із пластичним потенціалом g:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^{P} = \Delta \lambda^{P} \frac{\partial g}{\partial S_{ij}}, \qquad (Д5.37)$$

де  $\Delta \lambda^P$  – функціонал. Звичайно з "пластичним потенціалом" асоціюють вираз для "поверхні плинності":

$$\phi = Q(S_{ii}) - H(\chi, T, \dot{\varepsilon}_{u}^{S}) = 0, \qquad (Д5.38)$$

де параметр  $\chi$  визначає ізотропне зміцнення матеріалу. Якщо поверхня має окремі частини, що апроксимуються різними виразами, то є ребра, де ці частини поверхні стикуються. У точках на цих ребрах приріст пластичних деформацій визначається як сума вкладів від кожної з частин поверхні, що стикуються (модель Койтера). Тому:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^{P} = \sum_{k} (\Delta \lambda^{P})^{(k)} \frac{\partial Q^{(k)}}{\partial S_{ij}} = \sum_{k} (\Delta \lambda^{P})^{(k)} \cdot gradQ^{(k)} , \qquad (Д5.39)$$

де k вказує відповідну напруженому стану частину "поверхні плинності".

У NX Nastran вважається, що частини "поверхні плинності" описуються формулами типу

$$\phi = f^{(k)}(S_{ij} - \alpha_{ij}) - H(\chi, T, \dot{\varepsilon}_u^S) = 0, \qquad (Д5.40)$$

де  $H(\chi, T, \dot{\varepsilon}_{u}^{S})$  – "миттєва термомеханічна поверхня", яка апроксимується виразом білінійної ізотропної моделі

$$H(\chi, T, \dot{\varepsilon}_{u}^{s}) = \sigma_{s}(T, \dot{\varepsilon}_{u}^{s}) + \beta \cdot E_{P} \cdot \chi, \qquad (Д5.41)$$

де  $\sigma_s(T, \dot{\varepsilon}_u^s)$  – межа плинності, яка може залежати від температури T або від швидкості деформування матеріалу в точці тіла  $\dot{\varepsilon}_u^s$ ;  $E_P$  – модуль зміцнення матеріалу на даній частині "миттєвої термомеханічної поверхні". У випадку, коли функція  $H(\chi, T, \dot{\varepsilon}_{\mu}^{S})$  задається таблицею (у FEMAP – функцією типу 4..vs.Stress), то застосовується формула типу (Д5.41), причому модуль  $E_p$  розраховується на кожному лінійному відрізку функції, а  $\sigma_s(T, \dot{\varepsilon}_u^s)$  відповідає початку такого лінійного відрізка.

Прирощення компонентів тензора "мікронапружень"  $\alpha_{ii}$ , який описує кінематичне зміцнення матеріалу, обчислюються як

$$\Delta \alpha_{ij} = (1 - \beta) \cdot C_P \cdot \Delta \varepsilon_{ij}^P. \tag{Д5.42}$$

Параметр С<sub>р</sub> називається параметром зміцнення Прагера. Він зв'язаний з Е<sub>р</sub>. Параметром  $\beta$  задається тип зміцнення: при  $\beta = 0$  – кінематичне;  $\beta = 1$  – ізотропне;  $0 < \beta < 1$  – ізотропно-кінематичне. У NX Nastran покладається  $\beta = 0.5$  (ідеальний ефект Баушингера при  $C_p = E_p$ ).

У NX Nastran межа плинності обчислюється як

$$\sigma_{s}(T, \dot{\varepsilon}_{u}^{s}) = (\sigma_{s})_{0} \cdot \varphi(T) \quad \text{afo} \quad \sigma_{s}(T, \dot{\varepsilon}_{u}^{s}) = (\sigma_{s})_{0} \cdot \psi(\dot{\varepsilon}_{u}^{s}), \tag{Д5.43}$$

де  $\varphi(T)$  та  $\psi(\dot{\varepsilon}_u^S)$  – табличні функції;  $(\sigma_S)_0$  – початкове значення межі плинності.

Для функцій  $f^{k}(S_{ii} - \alpha_{ii})$  може використовуватися 4 варіанта. Для металів:

• теорія Мізеса-Генкі (ізотропний матеріал, геометрична інтерпретація: одна поверхня у вигляді нескінченного циліндра)  $f(S_{ij} - \alpha_{ij}) = \sqrt{3(S_{ij} - \alpha_{ij})(S_{ij} - \alpha_{ij})/2}$ ;

• теорія Треска-Сен-Венана (ізотропний матеріал, геометрична інтерпретація: шестинескінченна призма)  $f^{(1)} = |[(\sigma_1 - \alpha_1) - \lambda \cdot (\sigma_2 - \alpha_2)]/2|, \quad f^{(2)} = |[(\sigma_2 - \alpha_2) - \lambda \cdot (\sigma_2 - \alpha_2)]/2|,$ гранна  $-\lambda \cdot (\sigma_{3} - \alpha_{3})]/2 |, f^{(3)} = |[(\sigma_{3} - \alpha_{3}) - \lambda \cdot (\sigma_{1} - \alpha_{1})]/2 |.$ 

Тут  $\sigma_i$  та  $\alpha_i$  – головні значення напружень і "мікронапружень" відповідно.

Для ґрунтів у вигляді сипучих матеріалів (гравій, пісок):

• теорія Друкера-Прагера (ізотропний пружний та ідеально-пластичний матеріал, геометрична інтерпретація: конус з вершиною в області додатних значень напружень)  $\phi = \sqrt{3S_{ii}S_{ii}/2} + 3\beta\sigma_V - \sigma_S(T,\dot{\varepsilon}_V^S) = 0$ , де  $\sigma_V = (\sigma_X + \sigma_V + \sigma_Z)/3$ . Величини  $\beta$  та  $\sigma_S$  автоматично перераховуються NX Nastran виходячи з двох параметрів, що визначаються з експериментів: коефіцієнта "зчеплення"  $C \ge 0$  та "кута внутрішнього тертя"  $\varphi$ , причому  $\sigma_s = 6C \cos \varphi / [\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)]$  та  $\beta = 2 \sin \varphi / [\sqrt{3}(3 - \sin \varphi)]$ , а кут  $0 \le \varphi \le 90^\circ$ ;

• теорія Мора-Кулона (Mohr-Coulomb) – шестикутна піраміда, що є вписаною у конус Друкера-Прагера.

#### Д5.1.4.5. Рівняння для визначення деформацій повзучості

У моделях технічної теорії повзучості для ізотропного матеріалу виконується закон пружної зміни об'єму (Д5.20), а компоненти тензора деформації повзучості або швидкості повзучості визначаються відповідно з виразів

$$\varepsilon_{ij}^{C} = \varepsilon_{u}^{C} \frac{\partial g}{\partial S_{ij}}$$
 also  $\dot{\varepsilon}_{ij}^{C} = \dot{\varepsilon}_{u}^{C} \frac{\partial g}{\partial S_{ij}}$ , (Д5.44)

де  $g = g(\varepsilon_u^C, \sigma_u, T, t)$  – "потенціал повзучості". Звичайно "потенціал повзучості" обирають у такий спосіб, що  $\partial g / \partial S_{ii} = 3S_{ii} / (2\sigma_u)$ , а саме:

$$g = \sqrt{(3S_{ij}S_{ij}/2)} - \Phi(\mathcal{E}_u^C, T, t) = 0.$$
 (Д5.45)

Тоді відповідно

$$\varepsilon_{ij}^{C} = \frac{3\varepsilon_{u}^{C}}{2\sigma_{u}}S_{ij} \quad \text{afo} \quad \dot{\varepsilon}_{ij}^{C} = \frac{3\dot{\varepsilon}_{u}^{C}}{2\sigma_{u}}S_{ij}. \tag{Д5.46}$$

Рівняння кривої повзучості (що визначається експериментально), тобто вираз для  $\varepsilon_u^C$ , у NX Nastran визначаються одним з варіантів:

• емпіричною формулою  $\varepsilon_{\mu}^{C}(\sigma_{\mu},t) = A(\sigma_{\mu}) \cdot \{1 - \exp[-R(\sigma_{\mu}) \cdot t]\} + K(\sigma_{\mu}) \cdot t$ , де  $A(\sigma_u) = a \cdot \sigma_u^{\ b}$  also  $A(\sigma_u) = a \cdot \exp(b \cdot \sigma_u);$   $R(\sigma_u) = c \cdot \exp(d \cdot \sigma_u)$  also  $R(\sigma_u) = c \cdot \sigma_u^{\ d};$  $K(\sigma_u) = e \cdot [sh(f \cdot \sigma_u)]^g$ або  $K(\sigma_u) = e \cdot \exp(f \cdot \sigma_u); a, b, c, d, e, f, g$  – постійні апроксимації, що визначаються у експерименті;  $\sigma_{u}$  – напруження; t – час;

- емпіричною формулою  $\varepsilon_{u}^{C}(\sigma_{u},t) = a \cdot \sigma_{u}^{b} \cdot t^{d}$  (ті ж позначки);
- таблицею.

Як і в будь-якій еволюційній задачі, потрібно задавати початкові умови. В задачі пов-  
зучості звичайно задаються нульові початкові деформації повзучості, тобто 
$$\varepsilon_{u}^{c}(\vec{x},0) = 0$$
.

#### Д5.1.5. Граничні умови

Додатково до рівнянь рівноваги, геометричних і фізичних залучаються ГУ на S<sub>U</sub> і S<sub>P</sub>:

$$U_i|_{S_U} = \hat{U}_i; \tag{Д5.47}$$

$$\sigma_{mn} v_n \big|_{S_P} = \hat{P}_m, \tag{Д5.48}$$

а також зосереджені сили  $\hat{R}_m$ , прикладені в деякій кількості вузлів СЕС.

#### Д5.1.6. Варіаційна постановка статичної крайової задачі

Для розв'язування крайової задачі часто зручніше мати її варіаційну постановку.

Для отримання варіаційної постановки задачі використовуються рівняння рівноваги та геометричні, а також властивість симетрії тензора напружень і теорема Остроградського-Гауса. В підсумку утворюється наступний функціонал відносно варіацій переміщень і зв'язаних із ними деформацій

$$F = \int_{\Omega} \sigma_{mn} \delta \varepsilon_{mn} d\Omega - \int_{\Omega} \hat{O}_m \delta U_m d\Omega - \int_{S_P} \hat{P}_m \delta U_m dS - \hat{R}_m \delta U_m = 0, \qquad (Д5.49)$$

що в поєднанні з кінематичними ГУ (Д5.47) на поверхні S<sub>U</sub> визначає незліченну множину можливих (віртуальних) напружено-деформованих станів. Дійсний НДС є одним з віртуальних, але він додатково задовольняє фізичним рівнянням зв'язків між напруженнями та деформаціями.

Додатково треба відзначити, що, окрім задачі повзучості та динамічних задач (останні розглядаються в Додатку 7), час не є параметром, тобто явно не входить у рівняння. У цих випадках час застосовується лише для того, щоб розрізняти початковий стан з наступними.

# Д5.2. Скінченно-елементне представлення крайових задач про НДС твердого тіла, що деформується. Малі деформації

#### Д5.2.1. Вектори переміщень, деформацій, напружень

У NX Nastran реалізовано варіант МСЕ, в якому шуканим є вектор переміщень. У матричному позначенні це вектор

$$\{U\} = \{U_1; U_2; U_3\}^T.$$
(Д5.50)

Наближений розв'язок крайової задачі в об'ємі Ω (компоненти вектора переміщень) можна шукати у вигляді усіченого ряду:

$$U_{n} = U_{n}(\vec{x}, t) \approx \sum_{m=1}^{N^{B}} (q_{n})_{m}(t) \cdot \Phi_{m}(\vec{x}), \qquad (\text{Д5.51})$$

де  $\Phi_m(\vec{x})$  є повна за енергією система лінійно незалежних базисних функції;  $N^B$  – загальна їх кількість;  $(q_n)_m(t)$  – шукані вузлові значення; а відповідно до ідеології МСЕ

$$\Phi_m(\vec{x}) = \sum_{\Omega^e \subset \Lambda_m} \chi^e(\vec{x}) \cdot \varphi^e_m(\vec{x}).$$
(Д5.52)

Тут  $\Lambda_m$  – множина CE, що містять вузол з номером *m* ;  $\phi_m^e(\vec{x})$  – базисна функція скінченного елемента номер е (звичайно це інтерполяційний поліном), що відповідає вузлу т в межах об'єму СЕ  $\Omega^e$ ; функція приналежності до СЕ (оператор інцідентності):

$$\chi^{e}(\vec{x}) = \begin{cases} 1, & \vec{x} \subset \Omega^{e} ;\\ 0, & \vec{x} \not\subset \Omega^{e} . \end{cases}$$
(Д5.53)

Інакше кажучи, замість (Д5.51) маємо скінченно-елементну апроксимацію

$$U_{n} = U_{n}(\vec{x}, t) \approx \sum_{m=1}^{N^{U}} (q_{n})_{m}(t) \sum_{\Omega^{e} \subset \Lambda_{m}} \chi^{e}(\vec{x}) \cdot \varphi^{e}_{m}(\vec{x}), \qquad (\text{Д5.54})$$

де  $N^{U}$  – загальна кількість вузлів у тілі.

Оскільки для будь-якої точки в межах СЕ  $\chi^e(\vec{x}) = 1$ , то в межах СЕ  $\Phi_m(\vec{x}) = \phi_m^e(\vec{x})$ . За межами СЕ  $\chi^e(\vec{x}) = 0$ , тому в (Д5.54) фактично йде підсумовування тільки по M вузлах того СЕ, у якому розташована розглянута точка з координатами  $\vec{x}$ . Тому вводиться матриця базисних функцій СЕ [ $\phi$ ], через яку проводиться тотожна заміна формули (Д5.54):

$$\{U\} = [\phi]\{q\}_e, \tag{Д5.55}$$

де вектор переміщень у вузлах СЕ

$$\{q\}_e = \{(q_1, q_2, q_3)_1, ..., (q_1, q_2, q_3)_m, ..., (q_1, q_2, q_3)_M\}^T,$$
(Д5.56)

у якому  $(q_1, q_2, q_3)_m$  – переміщення *m* –го вузла CE; m = 1, 2, ..., M. Цей вектор є результатом вибірки значень переміщень  $\{q\}_e$  у вузлах даного CE з глобального вектора вузлових переміщень  $\{q\}$ . Оскільки в тривимірному випадку вектор  $\{U\}$  має розмірність  $3 \times 1$ , а  $\{q\}_e - 3M \times 1$ , то розмірність матриці базисних функцій –  $3 \times 3M$ . Матриця  $[\phi]$  – блочна:

$$[\phi] = [[\phi]_1, [\phi]_2, \dots, [\phi]_M], \tag{Д5.57}$$

у якій блок для *т*-го вузла має вигляд:

$$[\phi]_m = \begin{bmatrix} \varphi_m^e & 0 & 0\\ 0 & \varphi_m^e & 0\\ 0 & 0 & \varphi_m^e \end{bmatrix}.$$
 (Д5.58)

Для будь-якої точки тіла в межах CE вводяться вектори повних і температурних деформацій, напружень:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}\}^T;$$
(Д5.59)

$$\{\varepsilon^T\} = \{\alpha_T\}\Delta \overline{T} = \{(\alpha_T)_x, (\alpha_T)_y, (\alpha_T)_z, 0, 0, 0\}^T \cdot \Delta \overline{T}; \qquad (Д5.60)$$

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}\}^T,$$
(Д5.61)

де  $\gamma_{mn} = 2\varepsilon_{mn}$  при  $m \neq n$ ; а також аналогічні в заповненні вектора пружних  $\{\varepsilon^e\}$  і необоротних  $\{\varepsilon^P\}$  та  $\{\varepsilon^C\}$  деформацій.

#### Д5.2.2. Малі деформації

Вводиться матриця [*B*] диференціювання по глобальним координатам, з використанням якої лінійні рівняння (Д5.8) записуються у вигляді

$$\{\varepsilon\} = [B]\{q\}_e. \tag{Д5.62}$$

Оскільки вектор  $\{\varepsilon\}$  має розмірність 6×1, а  $\{q\}_e - 3M \times 1$ , то розмірність матриці [B] - 6×3M. Позначимо:

$$p_{im} = \partial \varphi_m^e / \partial x_i \,. \tag{Д5.63}$$

Матриця диференціювання – блочна:

$$[B] = [[B]_1, [B]_2, \dots, [B]_M], \qquad (Д5.64)$$

блоки якої, наприклад, для декартової системи координат, мають таке заповнення:

$$[B]_{m_{\mathcal{ACK}}} = \begin{bmatrix} p_{1m} & 0 & 0 \\ 0 & p_{2m} & 0 \\ 0 & 0 & p_{3m} \\ p_{2m} & p_{1m} & 0 \\ 0 & p_{3m} & p_{2m} \\ p_{3m} & 0 & p_{1m} \end{bmatrix}.$$
 (Д5.65)

-218 -

Лінійний закон Гука (Д5.10) запишемо у вигляді

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^e\}, \tag{Д5.66}$$

де [D] – матриця модулів пружності. Якщо матеріал пружно-ізотропний, то матриця

$$[D] = 2G(T) \cdot \begin{pmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix},$$
(Д5.67)

де  $2G(T) = E/(1+\mu); a = (1-\mu)/(1-2\mu); b = \mu/(1-2\mu); c = 0.5; E = E(T)$  – модуль Юнга;  $\mu = \mu(T)$  – коефіцієнт Пуассона. Для анізотропних матеріалів матриця [D] також симетрична, але має дещо інше заповнення.

#### Д5.2.3. САР при малих деформаціях

Використовуючи введені позначення, виразимо варіаційний функціонал (Д5.49) у матричному вигляді:

$$F = \sum_{e} \int_{\Omega^{e}} \delta\{q\}_{e}^{T}[B]^{T}[D][B]\{q\}_{e} d\Omega - \sum_{e} \int_{\Omega^{e}} \delta\{q\}_{e}^{T}[B]^{T}[D]\{\alpha_{T}\}\Delta \widehat{T} d\Omega - \sum_{e} \int_{\Omega^{e}} \delta\{q\}_{e}^{T}[B]^{T}[D](\{\varepsilon^{P}\} + \{\varepsilon^{C}\}) d\Omega - \sum_{e} \int_{S_{P}^{e}} \delta\{q\}_{e}^{T}[\phi]^{T}\{\widehat{P}\} dS - \sum_{e} \int_{\Omega^{e}} \delta\{q\}_{e}^{T}[\phi]^{T}\{\widehat{O}\} d\Omega - \delta\{q\}_{e}^{T}[\phi]^{T}\{\widehat{R}\} = 0.$$
(Д5.68)

Оскільки вектор вузлових значень переміщень  $\{q\}_{e}$  не залежить від параметрів інтегрування, він, а також вектор  $\delta\{q\}_e^T$  можуть бути винесеними за межі інтеграла. Позначимо:

$$[K]_e = \int_{\Omega^e} [B]^T [D] [B] d\Omega; \qquad (Д5.69)$$

$$\{P\}_{e} = \int_{\Omega^{e}} [\phi]^{T} \{\hat{O}\} d\Omega + \int_{S_{p}^{e}} [\phi]^{T} \{\hat{P}\} dS + [\phi]^{T} \{\hat{R}\}; \qquad (Д5.70)$$

$$\{Q\}_e = \int_{\Omega^e} [B]^T [D] \{\alpha_T\} \Delta \widehat{T} d\Omega; \qquad (Д5.71)$$

$$\{H\}_{e} = \int_{\Omega^{e}} [B]^{T} [D] (\{\varepsilon^{P}\} + \{\varepsilon^{C}\}) d\Omega.$$
(Д5.72)

Оскільки варіації переміщень є довільними, то одержимо систему алгебраїчних рівнянь (САР) вигляду

$$[K]{q} = {P} + {Q} + {H}$$
(Д5.73)

відносно глобального вектора  $\{q\}$  значень вузлових переміщень. У (Д5.72) позначені зборки по ступенях свободи:  $[K] = \sum_{e} [K]_{e}$ ;  $\{P\} = \sum_{e} \{P\}_{e}$ ;  $\{Q\} = \sum_{e} \{Q\}_{e}$ ;  $\{H\} = \sum_{e} \{H\}_{e}$ . Вектор  $\{P\}$ обумовлений зовнішніми силовими навантаженнями і масовими силами; вектори  $\{Q\}$  і  $\{H\}$ – фіктивними, що відбивають вплив температури (вектор  $\{Q\}$ ) і необоротних деформацій (вектор  $\{H\}$ ), якщо останні враховуються. При відсутності необоротних деформацій САР (Д5.73) – лінійна (СЛАР), при наявності – нелінійна.

## Д5.3. Крайова задача про втрату стійкості твердого тіла, що деформується

Крайова задача про втрату стійкості твердого тіла, що деформується розв'язується у NX Nastran 5.0 із застосуванням підходу Ейлера, коли форми втрати стійкості вважаються

UGS.F93

точно такими, як і форми власних коливань. Застосовуються геометричні рівняння при значних деформаціях.

#### Д5.3.1. Геометричні рівняння при значних деформаціях

Позначимо

$$\varepsilon_{ij} = (\varepsilon_{ij})_L + (\varepsilon_{ij})_{NL}, \qquad (Д5.74)$$

де  $(\varepsilon_{ij})_L$  – лінійна частина тензора деформацій (Д5.5), тобто (Д5.8); а  $(\varepsilon_{ij})_{NL}$  – нелінійна частина, тобто

$$(\varepsilon_{ij})_{NL} = \frac{1}{2} \nabla_i U_k \nabla_j U^k \,. \tag{Д5.75}$$

У декартовій системі координат (ДСК)  $U^i = U_i$ , усі символи Крістофеля  $\Gamma_{ij}^k = 0$ ,  $\nabla_i = \partial / \partial x_i$ , тому

$$(\varepsilon_{ij})_{L,QCK} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right); \quad (\varepsilon_{ij})_{NL,QCK} = \frac{1}{2} \frac{\partial U_k}{\partial x_i} \frac{\partial U_k}{\partial x_j}; \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$
(Д5.76)

тобто у формулі (Д5.74) залишається по п'ять складових. Позначимо:

$$b_{ij} = \partial U_i / \partial x_j \tag{Д5.77}$$

та введемо вектор

$$\{\theta\} = \{\{\theta_{x^1}\}, \{\theta_{x^2}\}, \{\theta_{x^3}\}\}^T, \text{ de } \{\theta_{x^j}\} = \{b_{1j}, b_{2j}, b_{3j}\}^T.$$
(Д5.78)

Тоді друге співвідношення (Д5.76) можна представити у вигляді

$$\{\varepsilon\}_{NL,QCK} = \frac{1}{2}[A]\{\theta\}, \qquad (Д5.79)$$

де матриця [A] розмірністю 6×9 (тривимірний випадок) у ДСК має вигляд:

$$[A]_{\mathcal{A}CK} = \begin{bmatrix} b_{11}; b_{21}; b_{31}; 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{12}; b_{22}; b_{32}; 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{13}; b_{23}; b_{33} \\ b_{12}; b_{22}; b_{32}; b_{11}; b_{21}; b_{31}; 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{13}; b_{23}; b_{33}; b_{12}; b_{22}; b_{32} \\ b_{13}; b_{23}; b_{33}; 0 & 0 & 0 & b_{11}; b_{21}; b_{31} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} \{\theta_{x^1}\}^T; \{0\}^T; \{0\}^T; \{0\}^T \\ \{0\}^T; \{0\}^T; \{0\}^T; \{0\}^T \\ \{0\}^T; \{0\}^T; \{0\}^T; \{0\}^T \\ \{0\}^T \\ \{0\}^T; \{0\}^T \\ \{0\}^T$$

де  $\{0\} = \{0, 0, 0\}^T$  – нульовий вектор.

Вектори  $\{\theta_{x^j}\}$  можна виразити через вузлові значення переміщень як

$$\{\theta_{x^{j}}\} = [W_{j}]\{q\}_{e}, \tag{Д5.81}$$

де матриця

$$[W_{j}] = [[p_{j1}], [p_{j2}], \dots, [p_{jM}]], \text{ a } [p_{jm}] = \begin{bmatrix} p_{jm}; & 0; & 0\\ 0; & p_{jm}; & 0\\ 0; & 0; & p_{jm} \end{bmatrix}.$$
(Д5.82)

- 220 -

Тоді з врахуванням (Д5.78)

(Д5.83)

UGS.F93

$$\{\theta\} = [W] \{q\}_e$$
,  
де матриця [W] розмірністю  $9 \times 3M$ 

$$\begin{bmatrix} W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [W_1] \\ [W_2] \\ [W_3] \end{bmatrix}.$$
(Д5.84)

Отже, з огляду на (Д5.83), можемо записати, що

$$\{\varepsilon\}_{NL,QCK} = \frac{1}{2} [A] \{\theta\} = \frac{1}{2} [A] [W] \{q\}_e = \frac{1}{2} [\overline{B}] \{q\}_e, \qquad (Д5.85)$$

де позначена матриця диференціювання нелінійних складових тензора деформацій (розмірністю  $6 \times 3M$ )

$$[\overline{B}] = [A][W]. \tag{Д5.86}$$

Отже

$$\{\varepsilon\} = (\{\varepsilon\}_L + \{\varepsilon\}_{NL}) = \left([B] + \frac{1}{2}[\overline{B}]\right) \{q\}_e, \qquad (Д5.87)$$

причому матриця диференціювання лінійної частини тензора деформацій [В] відповідає формулам (Д5.64) і (Д5.65).

Введемо позначення:

$$[\widetilde{\widetilde{B}}] = [B] + \frac{1}{2} [\overline{B}]. \tag{Д5.88}$$

Тоді остаточно запишемо, що з урахуванням нелінійних членів

$$\{\varepsilon\} = [\widetilde{\widetilde{B}}]\{q\}_e. \tag{Д5.89}$$

Матриця [B]<sub>NL</sub> є лінійною функцією переміщень через матрицю [A], тому що з (Д5.80) з урахуванням (Д5.81):

$$[A] = \begin{bmatrix} ([C_1]\{q\}_e)^T; & \{0\}^T; & \{0\}^T \\ \{0\}^T; & ([C_2]\{q\}_e)^T; & \{0\}^T \\ \{0\}^T; & \{0\}^T; & ([C_3]\{q\}_e)^T \\ ([C_2]\{q\}_e)^T; & ([C_1]\{q\}_e)^T; & \{0\}^T \\ \{0\}^T; & ([C_3]\{q\}_e)^T; & ([C_2]\{q\}_e)^T \\ ([C_3]\{q\}_e)^T; & \{0\}^T; & ([C_1]\{q\}_e)^T \end{bmatrix}.$$
(Д5.90)

Тому, враховуючи (Д5.83), (Д5.86) та (Д5.90), можна одержати, що вектор прирощення нелінійної складової деформацій

$$\{d\varepsilon\}_{NL} = d\{\varepsilon\}_{NL} = d\left\{\varepsilon\}_{NL} = d\left\{\frac{1}{2}[\overline{B}]\{q\}_{e}\right\} = d\left(\frac{1}{2}[A]\{\theta\}\right) = \frac{1}{2}\left(d[A]\{\theta\} + [A]d\{\theta\}\right) = [A]d\{\theta\} = \\ = [A][C]\{dq\}_{e} = [\overline{B}]\{dq\}_{e}.$$
(Д5.91)

Отже, вектор прирощення деформацій:

$$\{d\varepsilon\} = ([B] + [\overline{B}])\{dq\}_e = [\widetilde{B}]\{dq\}_e, \quad \{\delta\varepsilon\} = [\widetilde{B}]\{\delta q\}_e, \quad (Д5.92)$$

де  $[\widetilde{B}] = ([B] + [\overline{B}])$  – повна матриця диференціювання для одержання вектора *прирощення* деформацій, яка залежить від переміщень. Особливо відзначимо, що матриця диференціювання для одержання повного вектора переміщень, яка також залежить від переміщень, має дещо інше наповнення (порівняйте (Д5.92) з (Д5.88)). Ці загальні вирази зберігають вигляд і для інших координатних систем (циліндричної, сферичної тощо).

#### Д5.3.2. САР при значних деформаціях і методи її розв'язування у NX Nastran

Коли деформації – значні, замість (Д5.6) використовується нелінійне рівняння (Д5.5), а замість (Д5.55) – вираз (Д5.89). Оскільки у NX Nastran для розв'язування нелінійних САР використовується метод Ньютона-Рафсона, то для отримання САР застосовується декілька інший шлях, ніж у Розділі Д5.2.3.

Якщо у функціоналі (Д5.61) не робити заміну напружень згідно з формулою (Д5.59) на вираз через переміщення, то, з урахуванням другого виразу (Д5.92) і за умови довільності варіацій переміщень отримаємо, що:

$$\sum_{e} \int_{\Omega^{e}} [\widetilde{B}]^{T} \{\sigma\} d\Omega = \{P\}.$$
(Д5.93)

Згідно з методом Ньютона-Канторовича розв'язування нелінійних САР вважається, що

$$\{\psi\}^{(k+1)} \approx \{\psi\}^{(k)} + \frac{\partial\{\psi\}}{\partial\{q\}} \Big|^{(k)} \cdot \{dq\} \approx \{0\}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\}, \qquad (Д5.94)$$

де вектор похибки наближення { $\psi$ } визначається як різниця між правою та лівою частинами САР; k – номер ітерації. З (Д5.93):

$$\{\psi\}^{(k)} = \{P\} - \sum_{e} \int_{\Omega^{e}} ([\widetilde{B}]^{T} \{\sigma\})^{(k)} d\Omega; \quad k = 0, 1, \dots;$$
(Д5.95)

а відповідно до (Д5.94) та (Д5.95), оскільки  $\partial \{P\} / \partial \{q\} = [0]$ :

$$\frac{\partial \{\psi\}}{\partial \{q\}}\Big|^{(k)} \{dq\} = -\frac{\partial}{\partial \{q\}} \left( \sum_{e} \int_{\Omega^{e}} [\tilde{B}]^{T} \{\sigma\} d\Omega \right)^{(k)} \{dq\} = \\ = -\left( \sum_{e} \int_{\Omega^{e}} d[\tilde{B}]^{T} \{\sigma\} d\Omega + \sum_{e} \int_{\Omega^{e}} [\tilde{B}]^{T} d\{\sigma\} d\Omega \right)^{(k)}.$$
(Д5.96)

Оскільки *d*[*B*]≡[0], то з урахуванням (Д5.80) ... (Д5.84), (Д5.86):

$$\sum_{e} \int_{\Omega^{e}} d[\widetilde{B}]^{T} \{\sigma\} d\Omega = \sum_{e} \int_{\Omega^{e}} d[\overline{B}]^{T} \{\sigma\} d\Omega = \sum_{e} \int_{\Omega^{e}} d([A][C])^{T} \{\sigma\} d\Omega =$$
$$= \sum_{e} \int_{\Omega^{e}} [C]^{T} d[A]^{T} \{\sigma\} d\Omega = \sum_{e} \int_{\Omega^{e}} [C]^{T} [S] d\{\theta\} d\Omega = \sum_{e} \left( \int_{\Omega^{e}} [G]^{T} [S][G] d\Omega \cdot \{dq\}_{e} \right), \quad (\mbox{$\tt I5.97$})$$

де введені матриці:

$$[\widetilde{S}] = \begin{bmatrix} [S] & 0 & 0 \\ 0 & [S] & 0 \\ 0 & 0 & [S] \end{bmatrix}; \quad [S] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix};$$
(Д5.98)

$$[G] = [[G]_1, [G]_2, \dots, [G]_M];$$
(Д5.99)

M – кількість вузлів у СЕ, а матриця  $[G]_m$  для декартової системи координат (m = 1, 2, ..., M)

$$[G]_{m} = \begin{bmatrix} p_{1m} & p_{2m} & p_{3m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{1m} & p_{2m} & p_{3m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_{1m} & p_{2m} & p_{3m} \end{bmatrix}^{T}.$$
 (Д5.100)

В матриці [S] компоненти напружень  $\sigma_{ij}$  розраховують відповідно до фізичних законів (див. Розділ Д5.1.4) на основі вектора вузлових переміщень  $\{q\}$ .

Введемо глобальну симетричну матрицю

$$[K_{\sigma}] = \sum_{e} [K_{\sigma}]_{e}, \quad \text{de} \quad [K_{\sigma}]_{e} = \int_{\Omega^{e}} [G]^{T} [S] [G] d\Omega.$$
(Д5.101)

3 фізичного закону (Д5.59) із застосуванням (Д5.92):

 $d\{\sigma\} = [D]d\{\varepsilon^{e}\} = [D]d(\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^{T}\} - \{\varepsilon^{P}\} - \{\varepsilon^{C}\}) = [D]([\widetilde{B}]\{dq\}_{e} - \{d\varepsilon^{T}\} - \{d\varepsilon^{P}\} - \{d\varepsilon^{C}\}). (Д5.102)$ Підставимо цей вираз у (Д5.96):

$$\sum_{e} \int_{\Omega^{e}} [\widetilde{B}]^{T} \{ d\sigma \} d\Omega = \sum_{e} \left( \int_{\Omega^{e}} [\widetilde{B}]^{T} [D] [\widetilde{B}] d\Omega \cdot \{ dq \}_{e} \right) - \sum_{e} \int_{\Omega^{e}} [\widetilde{B}]^{T} [D] \{ \alpha_{T} \} d\widehat{T} d\Omega -$$

$$-\sum_{e} \int_{\Omega^{e}} [\widetilde{B}]^{T} [D](\{d\varepsilon^{P}\} + \{d\varepsilon^{C}\}) d\Omega.$$
 (Д5.103)

Позначимо:

$$[\overline{K}]_{e} = \int_{\Omega^{e}} [\overline{B}]^{T} [D] [B] d\Omega + \int_{\Omega^{e}} [B]^{T} [D] [\overline{B}] d\Omega + \int_{\Omega^{e}} [\overline{B}]^{T} [D] [\overline{B}] d\Omega; \qquad (Д5.104)$$

$$\{dQ\} = \sum_{e} \int_{\Omega^e} [\widetilde{B}]^T [D] \{\alpha_T\} d\widehat{T} d\Omega; \qquad \{dH\} = \sum_{e} \int_{\Omega^e} [\widetilde{B}]^T [D] (\{d\varepsilon^P\} + \{d\varepsilon^C\}) d\Omega, \qquad (Д5.105)$$

тоді (Д5.102) запишемо у вигляді

$$\sum_{e} \int_{\Omega^{e}} [\widetilde{B}]^{T} \{ d\sigma \} d\Omega = \sum_{e} \left( ([K]_{e} + [\overline{K}]_{e}) \cdot \{ dq \}_{e} \right) - \{ dQ \} - \{ dH \}$$
(Д5.106)

Підставимо отримані вирази в (Д5.96), а результат – в (Д5.94):

$$\left(\!\left[K\right] + \left[\overline{K}\right] + \left[K_{\sigma}\right]\!\right)^{(k)} \{dq\} = \{\psi\}^{(k)} + \{dQ\} + \{dH\}; \quad \{q\}^{(k+1)} = \{q\}^{(k)} + \{dq\}. \tag{Д5.107}$$

Реально розглядаються не нескінченне малі прирости, а такі, що мають кінцеві величини. Тому в (Д5.105) замість знаку диференціала d використовують знак прирощення  $\Delta$ , а замість (Д5.107) – такий вираз:

$$\left(\!\left[K\right] + \left[\overline{K}\right] + \left[K_{\sigma}\right]\!\right)^{\!(k)} \left\{\Delta q\right\} = \left\{\psi\right\}^{(k)} + \left\{\Delta Q\right\} + \left\{\Delta H\right\}; \quad \left\{q\right\}^{(k+1)} = \left\{q\right\}^{(k)} + \left\{\Delta q\right\}. \tag{Д5.108}$$

Формула (Д5.108) відповідає одній ітерації алгоритму Ньютона-Рафсона розв'язання нелінійної САР, який побудовано на основі методу Ньютона-Канторовича. У (Д5.108) матриця нестабільна, збирається знову на кожній ітерації. Для алгоритму доведено теореми існування та одиничності розв'язку. Є декілька варіантів модифікації цього методу, у яких матриця САР оновлюється через декілька ітерацій або зовсім не оновлюється.

Матриця [ $\overline{K}$ ] зветься матрицею значних переміщень, а [ $K_{\sigma}$ ] – матрицею геометричної жорсткості (geometric stiffness matrix).

#### Д5.3.3. Крайова задача про втрату стійкості твердого тіла, що деформується

При постановці крайової задачі про втрату стійкість твердого тіла розрізняють *почат*ковий та суміжний стани тіла.

Розв'язок для початкового стану утворюється у звичайний спосіб (див. Розділ Д5.2). Для отримання розв'язку для суміжного стану є САР (Д5.108). Але невідомо, яке прирощення навантаження потрібно зробити, щоб навантаження досягло критичного значення. Звичайно роблять у такий спосіб. Процес навантаження (від початкового стану до моменту втрати стійкості) вважається пропорційним, тоді додаткове навантаження можна призначати подібно до формули  $P_j = P_j^* + \Delta P_j = \alpha P_j^*$ , тобто  $\Delta P_j = (\alpha - 1)P_j^*$ . Це стосується і температурного навантаження, тому вектор  $\{\Delta Q\} = (\alpha - 1)\{Q^*\}$ . Оскільки початковий стан – врівноважений, то, відповідно до формули (Д5.95) вектор похибки наближення  $\{\psi\} = (\alpha - 1)\{P^*\}$ . Компоненти вектора  $\Delta H$  (від необоротних деформацій) і  $[K_{\sigma}]{\Delta q}$  (від напружень) теж зміняться пропорційно, хоча пропорційні множники будуть іншими, тобто  $\gamma$  та  $\beta$  відповідно. За умовою  $\{\Delta H\} = \{0\}$  (відсутності необоротних деформацій) та  $[\overline{K}] = [0]$  (деформації – малі)  $\beta = \alpha$ . Якщо тільки { $\Delta H$ } = {0}, тобто деформації – великі, але пружні, то  $\beta \approx \alpha$ .

Відомо, що втрата стійкості тіла може проходити за різними геометричними формами, для яких множники  $\alpha$ ,  $\beta$  та  $\gamma$  повинні бути своїми, тобто таких коефіцієнтів буде багато (теоретично – безліч). Тоді з (Д5.108) отримаємо САР:

$$([K] + [\overline{K}] + \beta_i [K_\sigma]) \{ \Delta q \} = (\alpha_i - 1)(\{P^*\} + \{Q^*\}) + (\gamma_i - 1)\{H^*\}; \quad i = 1, 2, \dots,$$
(Д5.109)

в якому у випадку малих деформацій матриця  $[\overline{K}] = [0]$ , тобто відсутня.

Оскільки після втрати тілом стійкості немає єдиного геометричного стану тіла, то і немає єдиного розв'язку САР (Д5.109). Тобто матриця цієї САР у момент втрати стійкості є виродженою, а її детермінант дорівнює нулю:

$$\det([K] + [\overline{K}] + \beta_i[K_{\sigma}]) = 0; \quad i = 1, 2, \dots$$
(Д5.110)

При  $\beta \approx \alpha$  кожне отримане значення множника  $\beta_i$  буде вказувати ступень недовантаження ( $\beta_i > 1$ ) або перевантаження ( $\beta_i < 1$ ) тіла відносно *i*-го стану втрати стійкості.

На практиці звичайно є сенс розглядати лише декілька значень  $\beta_i$  (менших за модулем).

У NX Nastran для задачі втрати стійкості тіла приймаються такі допущення:

- відхилення геометрії тіла перед деформуванням малі, тобто [ $\overline{K}$ ] = [0];
- конфігурація рівноваги тіла на момент втрати стійкості початкова геометрія;
- реакція матеріалу на момент втрати стійкості лінійна або нелінійна, але пружна, тобто  $\beta \approx \alpha$ ;
- поведінка тіла після того, як стійкість втрачена, не прогнозується.

**Примітка** Д**5.1.** Коли приймається  $[\overline{K}] = [0]$ , то розрахункові критичні навантаження звичайно є завищеними відносно експериментальних, оскільки при втраті стійкості деформації – значні, хоча й необов'язково мають необоротну складову.

**Примітка** Д**5.2.** Рекомендується задавати початкове навантаження таким, що наближується до критичного навантаження.

# Д5.4. Алгоритм "двох кроків" одержання розв'язку у NX Nastran задачі для тіл з малою жорсткістю

Якщо тіло має малу жорсткість, а деформації не вважаються значними, то в NX Nastran застосовується алгоритм "двох кроків", в якому на першому кроці розв'язується лінійна САР (Д5.66), а на другому до матриці жорсткості [K] додається матриця геометричної жорсткості [K<sub> $\sigma$ </sub>] (див. формулу (Д5.101)):

$$([K] + [K_{\sigma}]) \{q\} = \{P\} + \{Q\} + \{H\}.$$
(Д5.111)

В матриці  $[K]_{\sigma}$  компоненти напружень  $\sigma_{ij}$  розраховують відповідно до фізичних законів (див. Розділ Д5.1.4) на основі вектора вузлових переміщень  $\{q\}$ , який одержано на першому кроці.